PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO

CRISTIANNE MARÍA BUTTO ZARZAR / MARÍA TERESA ROJANO CEBALLOS

RESUMEN:
Investigaciones sobre el pensamiento algebraico temprano han tenido énfasis y varios autores han adoptado diferentes posturas: aritmética generalizada (Mason 1985), reificación (Sfard y Linchevski, (1994); el sentido de las operaciones (Slavit, 1999) tratamiento de las operaciones y las funciones, Schliemann, Carraher y Brizuela (2000) y Kaput y Blanton (2000) la generalización y la formalización progresiva. El estudio fue realizado con estudiantes de 5º y 6º grados de primaria entre 10-11 años, en la franja entre el pensamiento aritmético y pre-algebraico, donde la sintaxis algebraica no ha sido introducida. En este trabajo fueron introducidas las primeras ideas algebraicas en una secuencia de enseñanza en dos versiones: pre-simbólica (percepción de la idea de variación proporcional) y simbólica (encontrar y expresar una regla general e incorporarla en lenguaje Logo). El marco teórico se fundamenta en el Modelo Teórico Local (MTL) Filloy, Rojano y Puig (2008), que incluye cuatro componentes interconectados entre sí: 1) Modelo de Enseñanza, 2) Modelo de los Procesos Cognitivos; 3) Modelo de Competencia Formal; 4) Modelos de Comunicación. Además se incorporó la idea de Zona de Desarrollo Próximo de la perspectiva vygotskiana. Los resultados revelaron que los estudiantes son capaces de comprender las ideas de variación proporcional, descubren un patrón y formulan una regla general, y comprenden los problemas que involucran la relación funcional, como consecuencia del tránsito del pensamiento aditivo al multiplicativo. Además, el trabajo con un compañero más experto fue significativo para expresar una regla general.
PALABRAS CLAVE: pensamiento algebraico temprano, interacción entre pares, educación primaria.

INTRODUCCIÓN

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para acceder a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrentan al iniciarse en el estudio del álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal. Esto se debe en parte a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas: usualmente, se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos; por ejemplo, el geométrico.

Por otra parte, algunos acercamientos al álgebra que buscan otros puntos de partida como la noción de número racional, si sólo se limitan a considerar significados como la relación parte-todo, pueden resultar insuficientes para la transición hacia conceptos más abstractos como los de relación funcional y relación entre variables (Gnedenko y Markushevich citados en Bodanskii, 1991).

El acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, dándole énfasis a sus aspectos manipulativos. En ese abordaje se empieza por enseñar el trabajo con expresiones y ecuaciones y al final se resuelven problemas, aplicando este contenido sintáctico del álgebra.

En relación con las dificultades enfrentadas por los estudiantes enseñados con dicho acercamiento, la principal crítica es que se les introduce a un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que ellos vienen de trabajar con la aritmética, donde los símbolos tienen referentes que les son significativos y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos.

Por otra parte, está comprobado que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y parece oportuno iniciar ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años), aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la educación primaria.

En respuesta a cuestionamientos como los anteriores, se han llevado a cabo estudios para investigar la transición al álgebra desde diferentes perspectivas, como: la de la *aritmética generalizada* (Mason 1985), de *la reificación* (Sfard y Linchesvski, 1994); del *sentido de las operaciones* (Slavit, 1999), *sobre el tratamiento de las operaciones y las funciones* (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2000;

Schliemann, Carraher y Brizuela 2007); *la transición de la aritmética al álgebra y el uso de la generalización simbólica* (Kaput y Blanton, 2000) *la generalización y la formalización progresiva,* entre otros. Estos estudios muestran que en dicha transición están presentes obstáculos que requieren ser superados por los alumnos para llegar a las nociones propias del álgebra simbólica. Algunos resultados sugieren que la posibilidad de remontar tales obstáculos depende directamente del modo de iniciación en el pensamiento algebraico. En este sentido, existen diversas maneras de mirar el álgebra: como un lenguaje, como una herramienta, como aritmética generalizada o como cultura. Por otro lado, esta manera de entender el pensamiento algebraico y por extensión su iniciación temprana, involucra no solamente una mirada a estas perspectivas sino también su factibilidad como una ruta para acceder a las primeras ideas algebraicas. El estudio que aquí se reporta propone la iniciación temprana al álgebra a partir del razonamiento proporcional y de los procesos de generalización. Se trabajó con niños de 5º año de primaria, quienes se encontraban en un periodo de transición entre las estructuras aditivas y multiplicativas, propias de esas edades. A diferencia de los tratamientos tradicionales, partimos del razonamiento proporcional, en su condición de tema perteneciente al campo de las estructuras multiplicativas, desde donde proyectamos dicho contenido matemático a la variación proporcional, variable en una relación funcional y número general, vía los procesos de generalización.

Las investigadoras L. Booth (1988) y C. Kieran (1988, 1992) citadas en Linchevski y Livneh (1999), afirman que los estudiantes tienen dificultades con la estructura matemática en el sistema algebraico y esto refleja las dificultades que los mismos ya tienen en el sistema de numeración. Tomando en cuenta esto, parece oportuno que los alumnos se inicien en el tema a edades tempranas (10-11 años) para que puedan ir construyendo significados algebraicos paulatinamente. Por otra parte, en la enseñanza tradicional del álgebra, las fuentes de significados son usadas a posteriori para el álgebra simbólica, con ejemplos del mundo real o de la geometría, es decir, se introduce la sintaxis algebraica como una serie de reglas manipulativas y posteriormente, se resuelven problemas de enunciado, aplicando la simbolización y la manipulación simbólica del álgebra.

Este estudio se ubica al final del currículo de la escuela primaria, en la franja del pensamiento pre-algebraico. Se introducen las ideas algebraicas en dos versiones: pre-simbólica (percepción de la idea de la variación proporcional) y simbólica (encontrar y expresar una regla general e incorporarla en el lenguaje de programación Logo) por medio de la resolución de problemas propuestos en una secuencia de enseñanza. De hecho, se proponen dos rutas para acceder al álgebra: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. La elección de la primera (razonamiento proporcional) se basa, en primera instancia, en la familiaridad que los niños tienen con ese contenido matemático en la escuela primaria y específicamente en ese grado escolar (5º año de primaria) aún cuando están en transición del pensamiento aditivo al multiplicativo. Por otra parte, dicho contenido matemático se conecta conceptual e históricamente (Radford op cit 1996) con la idea de variación proporcional, variable en una relación funcional y número general, que lo conduce a la segunda ruta de acceso (los procesos de generalización). En esta parte, se trata de que los niños aprendan a percibir patrones y sean capaces de expresar y escribir el patrón mediante actividades que involucran el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patrones numéricos y figuras, entre otras actividades. En esta ruta, se espera que los niños puedan detectar similitudes, diferencias, recurrencias, así como generalizar operaciones aritméticas partiendo de casos particulares.

En este artículo nos vamos a enfocar en la ruta de acceso al pensamiento algebraico temprano a través del razonamiento proporcional.

PROPÓSITOS DEL ESTUDIO

- Estudiar la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo como una ruta para acceder a la iniciación temprana al pensamiento algebraico.
- Investigar la factibilidad de una iniciación temprana al álgebra a partir de contenidos matemáticos como el razonamiento proporcional, la variación funcional y los procesos de generalización.
- Diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto aspectos cognitivos como el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico).

Se consideró necesario trabajar en dos ambientes simultáneos: *lápiz y papel* y *ambiente Logo*; este último ofrece la posibilidad de trabajar en un entorno numérico, geométrico, y algebraico, con actividades en las cuales los niños pueden también hacer uso de patrones o regularidades en correspondencia con los valores que usan como entradas, al momento que se corre un programa. Lo anterior no sólo permite hacer sentido de lo que se están haciendo sino también validar las predicciones propias. El ambiente Logo se caracteriza por ser interactivo en dos modalidades: en el modo directo se producen efectos gráficos, numéricos y textuales y los niños son introducidos a la geometría de la tortuga; cada comando produce un efecto instantáneo, que puede ser gráfico, numérico o textual. Por su parte, el modo de programación requiere que los usuarios utilicen un lenguaje simbólico similar al algebraico. El uso del Logo en este estudio sirvió como un puente entre el lenguaje de distintos contextos: geométrico, numérico y algebraico, propiciando una visualización de percepciones geométricas y numéricas para acceder a ideas algebraicas partiendo del razonamiento proporcional hasta acceder a ideas algebraicas.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

La perspectiva teórica utilizada para la construcción de las secuencias de enseñanza se fundamenta en la idea de Modelo Teórico Local (MTL) desarrollada por (Filloy, 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008) que comprende cuatro componentes interrelacionadas: 1) Modelo de Enseñanza, 2) Modelo de los Procesos Cognitivos; 3) Modelo de Competencia Formal; 4) Modelo de Comunicación. Además, se incorporó a la investigación la idea de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) de la perspectiva vygotskiana (1978). Exploramos la idea de Zona de desarrollo actual (ZDA) por medio de la aplicación de un cuestionario inicial seguido de una entrevista ad-hoc, Se elaboró una secuencia didáctica para promover el acceso a las primeras ideas algebraicas, para concluir con un cuestionario final y una entrevista ad-hoc, con la finalidad de analizar la evolución de las primeras nociones algebraicas. Este estudio hace referencia al trabajo con cuatro parejas de niños. La investigación tuvo lugar en una escuela primaria del Distrito Federal, con 12 niños de entre 10-11 años de edad, que cursaban 5º grado y sin conocimiento previo del álgebra.

RESULTADOS

En general, el grupo de niños que participó en el estudio fue inicialmente diagnosticado de acuerdo a los siguientes temas matemáticos: secuencia aritmética y geométrica, comparación de cantidades, tabla de proporción, idea de variable en una relación funcional, número general y número específico. La mayoría de los estudiantes se ubicaban en un nivel de pensamiento aditivo, aún cuando los problemas requerían de la aplicación de un esquema multiplicativo. Otra característica fue que los estudiantes se encontraban en un nivel de pensamiento pre-algebraico, pues no dieron muestra de aplicar procesos de generalización significativos. Durante las sesiones de trabajo se utilizaron actividades en lápiz y papel y en ambiente de programación Logo. Las actividades que resultaron significativas para que los estudiantes dieran el paso hacia un razonamiento proporcional fueron aquellas en las que tuvieron que elaborar un programa general en Logo, utilizando un lenguaje simbólico (semejante al algebraico) para representar relaciones de proporcionalidad.

Durante las sesiones de trabajo, los estudiantes realizaron las actividades de la secuencia didáctica en parejas, con y sin el uso de la tecnología y se identificaron casos en que la intervención de un compañero con un nivel conceptual más avanzado potenció los procesos evolutivos hacia el pensamiento multiplicativo y hacia la idea de relación entre variables.

En la hoja de trabajo, que aparece al final, se describen los problemas que exploraron las ideas de variable en una relación funcional y de sucesión geométrica. Este tipo de problemas resultaron tareas fáciles cuando los estudiantes las resolvieron en papel y lápiz. Los niños fueron capaces de percibir la regularidad en la sucesión geométrica, llenar una tabla de valores y elaborar una regla expresada en un simbolismo pre-algebraico. A continuación se reproduce un fragmento de entrevista con un alumno (N) en el que el entrevistador (E) le pide revisitar esta hoja de trabajo, que él había completado en clase.

Segmento de la entrevista con Rodrigo:

E: Recuerdo que esta actividad fue motivo de mucha discusión, pasaron más de dos sesiones sólo en esta actividad. Aquí esta la alberca número 1, número 2, número 3 y tenían que hacer la número 4. y no tuvieron problema para hacer la alberca número 4.

N: No

E: Donde tuvieron problema?

N: No es que, no la descubrió, lo que yo descubrí, es que aquí en la alberca número uno, así cómo que da un brinco, y eran los mosaicos azules de la alberca tres y después aquí la alberca número dos eran los mosaicos de la alberca número cuatro (descubre esta relación) $A_{n+1} = A_n + B_n$

E: Explícame como dabas el brinco, ¿Qué sucedía en esos brincos que tú me decías de las albercas?, de los mosaicos azules de la alberca número uno a la alberca número 3 y los mosaicos azules de la alberca número dos a la alberca número cuatro.

N: Yo supongo que no es porque aquí si da el brinco y acá no.

E: ¿Qué brinco daba de la alberca uno a la tres?

N: Este…, ocupa una piscina, no, si da el brinquito porque pasa por la alberca número tres.

E: ¿Qué sucede en el brinquito?

N: Si, haz de cuenta, que esta es toda la piscina y aquí 1, 2, 3 y 4 de base y los cuatro de base y de altura y los cuatro de altura aumentan acá 1, 2, 3 y 4 y acá también, da el brinquito, 1,2, 3.

E: Pero, hacia donde da el brinquito, de la alberca número 1 a la número 3

En este diálogo se percibe que el niño descubre la siguiente relación $A_{n+1} = A_{n-1} + B_{n-1}$ y la expresa como un brinco, es decir, que la alberca número tres está formada del total de los mosaicos blancos y azules de la alberca número uno.

CONCLUSIONES

Las dos rutas de acceso, pensamiento proporcional y procesos de generalización probaron ser útiles en la introducción de las primeras ideas algebraicas, conjuntamente con el diseño de actividades en dos ambientes: lápiz y papel, y ambiente Logo; la clave en este último se debe a su integración de contextos numéricos y geométricos. La combinación de actividades, materiales y ambientes, así como la estructura de la secuencia didáctica supervisada por el maestro ayudó a promover la ZDP. Los estudiantes pudieron acercarse al pensamiento algebraico a través de números, formas y medidas, y les hizo pensar acerca de las relaciones entre variables, garantizándoles la oportunidad de operar mentalmente con estos objetos. El ambiente numérico y geométrico de Logo permitió a los estudiantes observar patrones numéricos y geométricos, y construir una regla en términos algebraicos o pre-algebraicos. Por otro lado, el trabajo con un compañero más experto, o con el maestro, mostró ser importante para que los niños pudieran expresar estas reglas.

AGRADECIMIENTOS

La primera autora fue apoyada por una beca IMEXCI de la SRE de México para estudios doctorales. La segunda autora fue apoyada por el proyecto CONACyT (Ref G- 263385). La incorporación de nuevas tecnologías en la cultura escolar: la enseñanza de las ciencias y las matemáticas en la escuela secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bodanski, F. G. (1991). "The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children", en *Psychology abilities of primary school children in learning mathematics*, Reston, Virginia: National Council Of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. y Kaput, J. (2002). PME, 26, *Psychology of Mathematics Education*, vol. 1.

Carraher, D.; Schliemann, y Brizuela, B. (2000). *Early algebra, early arithmetic: Treating operations ace functions plenary*, presentado en el XXII PME-NA; Tucson, AZ, octubre 7-10.

Carraher, D.; Schliemann y Brizuela, B (2001). "Operate you on unknowns?", en PME, 25 *Psychology of Mathematics Education*, Utrecht/ The Netherlands, vol. 1, pp130-140.

Carraher, D y Earnest, D. (2003) "Guess my rule revisited", en PME, 27 *Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, Hi, vol 1, pp173-180.

Carraher, D.; Spinillo, G.; Meira, L. L y Rocha Falcão, J. T (1993). *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Editora Universitária-UFPE.

Filloy; E. (1990). "PME algebra research. To working perspective", en G. Booker (eds) *Proceedings of the fourteenth annual conference for the psychology of Mathematics Education*, vol.1, pp.PIII-PII33.Oaxtepec, Mexico.

Filloy, E.; Rojano T. y Puig, L. (2008). *Educational álgebra. A theoretical and empirical approach*. Berlin: Heidelberg/ Nueva York York: Springer.

Hoyles, C. y Sutherland, R. (1989). *Logo mathematics in the classroom,* Estados Unidos: Routledge

Hoyles, C. (s/f). *Ways of Learning in to computer based environment: some findings of the logo maths project*. Londres: Institute of Education University of London

Herscovics, N y Linchevski, L (1994). *Cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78

Mason; J.; Graham, A.; Pimm, D. y Gower (1985). *In routes of roots of algebra*, Gran Bretaña: The Open University Press.

Sfard y Linchevski, L.(1994). “The gains and pitfalls of reification The marries of algebra”, *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Slavit, D. (1999). “The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thinking”, *Educational Studies in mathematics* 37: 251-274, Kluwer Academic Publishers.

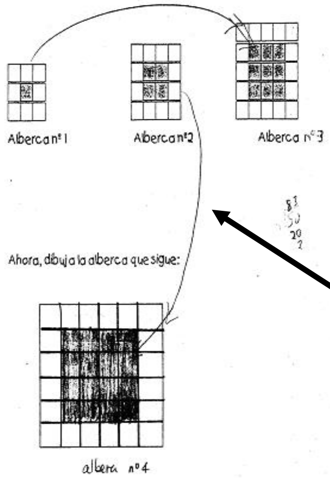
Schliemann, Carraher y Brizuela (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children´s ideas to classroom practice*, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Ursini, S. (1993). *Pupils approaches to different characterizations variable of in logo*, tesis doctoral en la University of London Institute of Education.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society, the development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

HOJA DE TRABAJO

Observa las siguientes albercas con sus bordes



Relación de Rodrigo $A_{n+1} = A_{n-1} + B_{n-1}$

n	T_n	A_n	B_n
Número de albercas	Número total de mosaicos azules y blancos	Número de mosaicos azules	Número de mosaicos blancos
Alberca nº1	9	1	8
Alberca nº2	16	4	12
Alberca nº3	25	9	16
Alberca nº4	36	16	20
	49	25	24

$A_{n+1} = A_{n-1} + B_{n-1}$

Sumando los mosaicos azules y blancos dan el resultado total de los mosaicos

$$\begin{array}{r} 49 \\ -25 \\ \hline 24 \end{array}$$

Secuencia aritmética $B_{n+1} = B_n + 4$

Relación potencial $A_n = n^2$

Relación lineal $T_n = A_n + B_n$

1) ¿Cómo vas obteniendo el número de mosaicos blancos? calculando el area y restando los azules

2) ¿Cómo vas obteniendo el número de mosaicos azules? Se multiplica no de la base y no de la altura

3) ¿Qué hay más? ¿Mosaicos azules o mosaicos blancos? azules

4) ¿Como encuentras el número de mosaicos blancos si conoces el lado de la alberca? ~~restando los azules~~ multiplicando el no de cuadritos que hay por el no de lados

5) ¿Como encuentras el número de mosaicos azules si conoces el lado de la alberca? ~~restando los blancos~~ multiplico la base por la altura, menos los blancos