
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN CON ESTUDIANTES DE 1º Y 2º DE SECUNDARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA DEL DISTRITO FEDERAL: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

GABRIELA ARRIAGA GARCÍA / CRISTIANNE MARÍA BUTTO ZARZAR

RESUMEN:

El estudio que se reporta hace referencia a las dificultades que los estudiantes presentan en el acceso al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización. El marco teórico se fundamenta en las aportaciones de Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) sobre el acceso al álgebra por medio de la generalidad, mismo que consiste en: percibir un patrón, decirlo, registrarlo y validarlo. La metodología del estudio es cualitativa. Se llevó a cabo con ocho estudiantes de primero y segundo de secundaria de una escuela pública del DF, México. Se dividió en tres etapas: Cuestionario inicial y entrevista *ad-hoc*, Secuencia didáctica y Cuestionario final. En la primera etapa los estudiantes lograron resolver secuencias aritméticas crecientes y percibir patrones, tenían dificultades con secuencias aritméticas decrecientes y secuencias geométricas, así como para comprender ideas de variación proporcional y formular reglas generales. En la segunda etapa se trabajaron actividades en parejas. Los alumnos desarrollaron actividades de proporcionalidad geométrica, secuencias de figuras y escalas, percibían el patrón y, aunque la mayor dificultad era el planteamiento de las fórmulas, paulatinamente, lograron plantearlas. La interacción social permitió que los estudiantes accedieran a otro nivel conceptual. En la tercera etapa los estudiantes lograron desarrollar actividades de variación proporcional, secuencias geométricas y planteamiento de reglas sin la necesidad de ayuda. Se puede afirmar que llegaron a la cuarta etapa del trabajo de la generalidad propuesta por Mason *et al.* (1985), hecho que no se constató en la primera etapa, pues ninguno había logrado dar una fórmula en el cuestionario inicial.

PALABRAS CLAVE: procesos de generalización, estudiantes de secundaria, pensamiento algebraico.

INTRODUCCIÓN

Las dificultades que los estudiantes presentan con el álgebra se deben a que ésta es vista tradicionalmente de manera lineal. Esto es, generalmente en la escuela secundaria el álgebra se presenta como una extensión de los algoritmos aritméticos hacia los algoritmos con literales. Asimismo, se trata como un contenido aislado de los demás, es decir no se interconecta con las otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, con la geometría.

El acercamiento más tradicional al álgebra empieza con el manejo de la sintaxis algebraica, luego se trabajan las ecuaciones, se resuelven y se verifican sus soluciones. Se otorga poco significado a las literales utilizadas y a las expresiones de las que forman parte, ello limita el acceso a ideas más avanzadas, por ejemplo, a la noción de función. Este acceso tradicional al álgebra generalmente conduce a los alumnos a un simbolismo desprovisto de significado que no les permite acceder a la abstracción matemática.

Como consecuencia del aprendizaje en matemáticas carente de significado, el rendimiento en esta área del conocimiento y del álgebra en particular, se ve afectado. Esto se ve reflejado, por ejemplo, en evaluaciones nacionales entre las que se encuentran "Excale" que realiza el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE, 2006). Esta prueba estandarizada se ajusta a los contenidos curriculares del nivel básico y clasificó a los estudiantes en cuatro niveles de logro denominados "debajo del básico", "básico", "medio" y "avanzado". Los resultados de "Excale" establecen que aproximadamente el 80% de los alumnos mexicanos no logran resolver los problemas algebraicos ahí planteados.

En respuesta a los señalamientos anteriores y al interés por detectar y tratar de resolver las dificultades para comprender el álgebra, se han llevado a cabo diversas investigaciones de la didáctica de las matemáticas y planteado distintos acercamientos al álgebra, entre ellas las que la ven como generalización o pensamiento en términos de número general (Mason, Graham,

Pimm, Gowar, 1985). En el acercamiento al álgebra por medio de la generalidad destacan estudios como los de Mason *et al.* (op cit, 1985) que afirman que el trabajo con la generalidad es un elemento esencial para desarrollar el pensamiento matemático y algebraico y que permite el acceso a la abstracción matemática. Reggiani (1994) indica que la generalización es parte indispensable en el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico.

Las dificultades del abordaje del álgebra mediante la generalización son estudiadas por Mc Gregor y Stacey (1993) quienes mencionan que los estudiantes tienen dificultades para describir y expresar algebraicamente patrones.

Ursini (1993) encuentra que los alumnos presentan dificultades para el reconocimiento de los patrones pero sobre todo en probar la validez de las fórmulas.

Otra investigación sobre la generalidad es la de Rossi y Rivera (2007), quienes trabajan con patrones crecientes y decrecientes y encuentran que existen importantes dificultades en los estudiantes cuando se trata de detectar un patrón en una secuencia que decrece y que, además, utiliza números negativos.

Amit y Neria (2008) encontraron que los estudiantes son capaces de plantear generalizaciones de patrones no lineales y logran relacionar el patrón con la posición del término en la secuencia.

El estudio que se reporta hace referencia a los primeros contenidos algebraicos del currículo de la escuela secundaria, en la franja del pensamiento pre-algebraico al algebraico, donde se introduce a los alumnos a la sintaxis algebraica. Se trabajan los procesos de generalización tomando como base la variación proporcional y las secuencias numéricas y de figuras para llegar a la expresión de una regla general e incorporarla en lenguaje algebraico. Esto se

realiza por medio de la resolución de actividades propuestas en una secuencia de enseñanza.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

- Estudiar las dificultades que los estudiantes presentan en el acceso al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización.
- Diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto aspectos cognitivos como el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) para que los alumnos accedan al pensamiento algebraico.
- Observar diferentes tipos de interacción social que se desarrollan durante la secuencia didáctica y verificar sus efectos en los dominios matemáticos.

MARCO TEÓRICO

Se fundamenta en las aportaciones de Mason et al (op cit, 1985). Desde la perspectiva de estos autores el Álgebra es un lenguaje por medio del cual se comunican las ideas matemáticas de forma sintética y su característica principal es que puede expresar declaraciones generales que existen en todas las áreas de las matemáticas. Para acceder al Álgebra, proponen conocer las ideas básicas de las que se deriva el Álgebra y de las que fundamentalmente depende la comprensión de dicho contenido.

Una de las ideas básicas o raíces del Álgebra es la “Expresión de la generalidad” que consiste en considerar que la Generalidad es “la vida de las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad” (Mason *et al.*, 1985).

Mason et al (op cit, 1985) encuentran pertinente que el trabajo de la “Expresión de la generalidad” se realice en cuatro etapas:

- 1) Ver un patrón
- 2) Decir cuál es el patrón
- 3) Registrar un patrón y,
- 4) Prueba de la validez de las fórmulas

Ver un patrón

En esta etapa se pueden presentar actividades con secuencias de figuras o de números, donde se solicite a los alumnos la figura o el número siguiente. Se espera que el alumno observe lo que está pasando de una figura a la otra, o de un número al siguiente y en esta observación el alumno perciba la regularidad.

Decir cuál es el patrón

El alumno necesita expresar lo que observó y para ello es necesario incluir en las actividades preguntas que indaguen sobre cómo encontró la figura o el número siguiente y que lo comente con los demás compañeros, en ese proceso puede percatarse de si están correctas o no sus reflexiones.

Registrar el patrón

Se requiere que el alumno exprese de forma sucinta lo que ya dijo para que las ideas queden asentadas y no olvide las conjeturas a las que va llegando, se inicia en la manipulación de expresiones cuando las construye y reconstruye. El registro del patrón puede iniciar con oraciones donde se mezclen palabras, dibujos, y símbolos. Se debe insistir en este proceso hasta obtener expresiones exclusivamente simbólicas.

Prueba de la validez de las fórmulas

El alumno puede comprobar su fórmula en la actividad de la que surgió o en otros casos. La prueba se puede realizar con cálculos aritméticos, con dibujos o contando.

METODOLOGÍA

La metodología es de corte cualitativo. Se trabajó con ocho estudiantes de primero y segundo grado de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal. Las etapas del estudio fueron tres: aplicación de un *cuestionario inicial y entrevista ad-hoc*, instrumentación de una *secuencia didáctica* y la aplicación de un *cuestionario final*.

RESULTADOS DEL ESTUDIO

1ª etapa: cuestionario inicial de contenidos matemáticos y entrevista ad-hoc

Consistió en el diseño de actividades con contenidos como secuencias aritméticas y geométricas; variable en sus tres usos: número específico, número general y en relación funcional; y variación proporcional; con el fin de conocer los antecedentes de los alumnos respecto al tema de investigación y definir sus niveles de adquisición conceptual.

Análisis de los datos

1º Niveles de logro. Se definen como la evidencia de que el alumno tiene los elementos matemáticos necesarios para responder a la solicitud de las preguntas, esto hace referencia al nivel de conceptualización matemática que demuestra.

Se encontraron dos niveles de logro que se describen en la tabla 1.

Los resultados de este análisis permiten detectar que los alumnos presentan deficiencias en el trabajo con los procesos de generalización, no llegan a la tercera y cuarta etapa que proponen Mason et al (op cit, 1985). Aproximadamente el 40% de los alumnos del estudio puede ver patrones e intenta comunicarlo. El otro 60% tiene dificultades desde la percepción del patrón. El manejo de aspectos algebraicos no existe, los estudiantes resuelven con procedimientos basados principalmente en operaciones aritméticas.

2º Categorías de resolución de problemas. Toma en cuenta los tipos de respuesta proporcionados por los alumnos, considerando los procedimientos y la comprensión de las actividades propuestas. Se encontraron dos categorías de resolución de problemas que se caracterizan en la tabla 2.

3º Niveles de conceptualización matemática. Se ubicó a los alumnos en niveles de conceptualización matemática que se definen como la comprensión que tienen los alumnos sobre los procesos de generalización, es decir, si desarrollan el proceso completo que implica el trabajo de la generalidad propuesto por Mason et al (op cit, 1985). Se ubicó a los alumnos en dos niveles de conceptualización matemática: bajo y medio.

Nivel de conceptualización matemática bajo

Los alumnos no logran percibir el patrón que rige a las secuencias geométricas. Tienen dificultades para aplicar el patrón para elementos más alejados en las secuencias aritméticas. No plantean reglas generales.

Nivel de conceptualización matemática medio

Los alumnos pueden resolver secuencias aritméticas y geométricas, perciben el patrón y pueden extenderlo para datos más alejados. No lo pueden traducir en una regla simbólica.

4ª Análisis de la entrevista *ad-hoc*. Este análisis tiene como objetivo indagar con el alumno sobre su comprensión y tratamiento de las preguntas que se le plantearon en el *Cuestionario Inicial* y se cuestiona sobre sus concepciones acerca de las nociones matemáticas.

La entrevista se llevó a cabo de manera individual, después de que se solicitó autorización al alumno y a las autoridades de la escuela. Se realizó en un salón de clases y fue video-grabada. Se constató que no pueden expresar reglas generales simbólicas, hecho que muestra que el uso de las literales no tiene significado para ellos porque no han tenido la oportunidad de elaborar sus propias expresiones algebraicas.

2ª etapa: secuencia didáctica

El diseño de la secuencia didáctica tomó en cuenta los resultados de la primera etapa del estudio y consideró contenidos de razonamiento proporcional, variación proporcional y variable como número específico, como número general, y como relación funcional, hacia la expresión de la generalidad (Ver mapa conceptual.1).

Análisis de los datos

1. Niveles de logro: Toma en cuenta si las parejas de alumnos logran completar las actividades con sus elementos matemáticos. Se encontraron tres niveles.

Nivel de logro Bajo

El alumno no puede dar una regla para figuras más alejadas pues su pensamiento aditivo no le permite relacionar en una secuencia de figuras el número de figura con el número de cuadros en la base, pues ello implicaría

establecer que la relación es $b=2n-1$ (Ver imagen 1). No hay indicios de pensamiento multiplicativo. ´

Nivel de logro medio

Los alumnos pueden, por ejemplo, aplicar la escala que se les ha dado. Argumentan que multiplicaron por 2 y contaron los cuadritos para saber cuánto medía cada longitud de la casa. (Ver imagen 2).

Nivel de logro alto

Los alumnos logran identificar el patrón que rige una secuencia aritmética en unas fichas de dominó y logran plantear la regla para las casillas superiores y para las inferiores. Perciben que son patrones diferentes para cada casilla y verifican su regla. (Ver imagen 3).

2. Categorías de Resolución de Problemas

En este análisis se consideraron las estrategias que los alumnos siguen para desarrollar las actividades de la secuencia didáctica. Se encontraron tres categorías de resolución que se describen a continuación.

Categoría aritmética

Los alumnos utilizan predominantemente una estrategia de resolución aritmética que les permite encontrar un patrón que involucra adición. No pueden encontrar una regla que represente la relación número de figura-cuadros en la base, o bien, número de figura-total de cuadros.

Categoría pre-algebraica

Los alumnos lograron identificar parejas de rectángulos proporcionales. Notaron que si la proporción se ve del rectángulo grande al chico se puede

dividir y como las parejas que habían formado tenían dimensiones que eran múltiplos de las dimensiones de los rectángulos pequeños no les resultaba difícil realizar la división. Sin embargo, cuando no era tan clara esta relación porque el número que divide no era número natural, tuvieron más dificultades. Haciendo hincapié en que también multiplicando encontrarían esos números, la investigadora logró que un estudiante considerara a “1.5” como factor. Luego, pudieron considerar que una fracción podía ser el factor de proporcionalidad.

Categoría algebraica

En esta categoría los estudiantes pueden trazar dos dibujos a escala, en el primer caso se les explicita la escala y en el segundo la deben descubrir. Una pareja logra llegar a la expresión de la regla en ambas actividades incluso cuando se le dan otros datos puede dar una expresión algebraica. Luego en la plenaria comprueban si su regla funciona. Esto es, pueden concretar las etapas que proponen Mason et al (op cit, 1985) para el trabajo de la generalidad: ver, decir, registrar y probar el patrón.

3. Resultados de la interacción social en pareja durante la secuencia didáctica de procesos de generalización

El análisis de la interacción social en pareja se realizó de acuerdo a la propuesta de Butto (2005) tomando en cuenta episodios de la secuencia didáctica.

En las sesiones de trabajo de la secuencia didáctica se observaron los siguientes tipos de interacción social:

Explicación univocal: en este tipo de interacción, cada uno de los alumnos juzga que su compañero no entendió y que no puede intervenir, por lo tanto un integrante de la pareja acepta tal posición. El término univocal se refiere a que la opinión de un sólo alumno predomina.

Explicación multivocal: en este tipo de interacción ocurre un conflicto entre los alumnos, cada uno defiende como correcto su razonamiento. Este tipo de interacción constituye para ambos alumnos un avance en sus perspectivas para explicar su pensamiento y tratar de cambiar el del otro.

Colaboración indirecta: en este tipo de interacción los estudiantes piensan en voz alta, mientras aparentemente resuelven tareas de manera independiente; sin embargo, la manera como capitalizan los comentarios de uno y otro, indica que, de hecho, ellos estaban monitoreando la actividad del otro, hasta cierto punto. Las oportunidades de aprendizaje surgieron cuando un alumno dijo e hizo algo significativo para el otro en un determinado momento, en el contexto de su actividad presente.

En la tabla 3 se muestra el tipo de interacción que se observó con las parejas de estudiantes.

Es preciso destacar que el tipo de interacción que predominó fue el de colaboración indirecta.

3ª etapa: Cuestionario final

El cuestionario final tuvo como objetivo indagar lo que los alumnos lograban después de la implementación de la secuencia didáctica. Está compuesto por 8 actividades, algunas que fueron trabajadas en el cuestionario inicial y en la secuencia didáctica, así como otras nuevas. Todas las actividades abordan temas como secuencias aritméticas y geométricas, variación proporcional, variable como número general, como número específico y en relación funcional.

Análisis de los datos

1º Niveles de logro

Existe un avance en los estudiantes porque evidencian un pensamiento multiplicativo, es decir, se reafirma el nivel de logro alto, que había surgido en la secuencia didáctica. En este nivel se ubican los estudiantes que pueden detectar patrones o regularidades, expresarlos simbólicamente y verificar sus elaboraciones, es decir, desarrollan las cuatro etapas propuestas por Mason, Graham, Pimm y Gowar (op cit, 1985) para el trabajo de la generalidad. El nivel de logro alto no aparecía en el cuestionario inicial.

2º Categorías de resolución de problemas

Se observa de manera frecuente la tercera categoría de resolución de problemas: la algebraica, que no se presentó en el cuestionario inicial. En ella se concretan las cuatro etapas para la expresión de la generalidad propuestas por Mason, et al (op cit 1985), es decir, algunos estudiantes muestran que pueden ver, comunicar, registrar de forma simbólica y probar un patrón. En la tabla No. 4 se muestra cómo cambiaron las categorías de resolución de problemas, del *cuestionario inicial* al *cuestionario final*. Destaca por ejemplo que el alumno EFH pasa de la categoría aritmética a la algebraica al final del estudio. Sólo un estudiante no muestra evolución (DLG).

3º Niveles de conceptualización matemática

Los alumnos CHLR, YBR, LAV, CCB, CED y EFH han cambiado de nivel de conceptualización matemática, los primeros cinco alumnos pasan de un nivel de conceptualización matemática medio a un nivel alto. El alumno EFH pasa de nivel de conceptualización bajo hacia nivel alto. ALC pasa de nivel de conceptualización bajo a medio y sólo DLG permanece en el nivel bajo.

CONCLUSIONES

El desarrollo del pensamiento algebraico vía los procesos de generalización es eficaz cuando se logran interconectar diferentes contenidos matemáticos y se promueve la interacción social de la forma explicación multivocal.

La generalidad puede llevar tiempo con algunos alumnos, pero ofrece la posibilidad de trabajar diferentes contenidos matemáticos al mismo tiempo que se trabajan los algebraicos y ello representa una gran ventaja para el docente de matemáticas que desea enseñar los contenidos curriculares de manera significativa y no parcializada. Asimismo, el estudiante accede a todos los temas del currículo y es él quien encuentra las relaciones existentes.

REFERENCIAS

- Amit, M. y Neria, D. (2008). "Methods for de generalization of non-linear patterns used by talented pre-algebra students", en PME 32 y PME-NA XXX 2, 49-56.
- Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria*, tesis doctoral. México: Departamento de Matemática Educativa/CINVESTAV-IPN.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2006). *El aprendizaje del español y las Matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México: INEE.
- Rossi, J. y Rivera F. (2007). *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lamberg, T. y Wiest, L. R. (Eds.).Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno, pp. 179-185
- Mac Gregor, M y Stacey, K. (1993). "Seeing to patern and writing to rule", PME, *Psychology of Mathematics Education*, Ibaraki, Japón.
- Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Gran Bretaña: The Open University Press.
- Reggiani, M. (1994). "Generalization as a basic for algebraic thinking: observations with 11-12 years old pupils", en Proceeding of the XVIII PME Conference Lisboa, Portugal, pp 97-104.

Ursini, S. (1993). *Pupils approaches to different characterizations variable of in logo*, tesis doctoral en University of London Institute of Education.

ANEXO

Mapa Conceptual 1

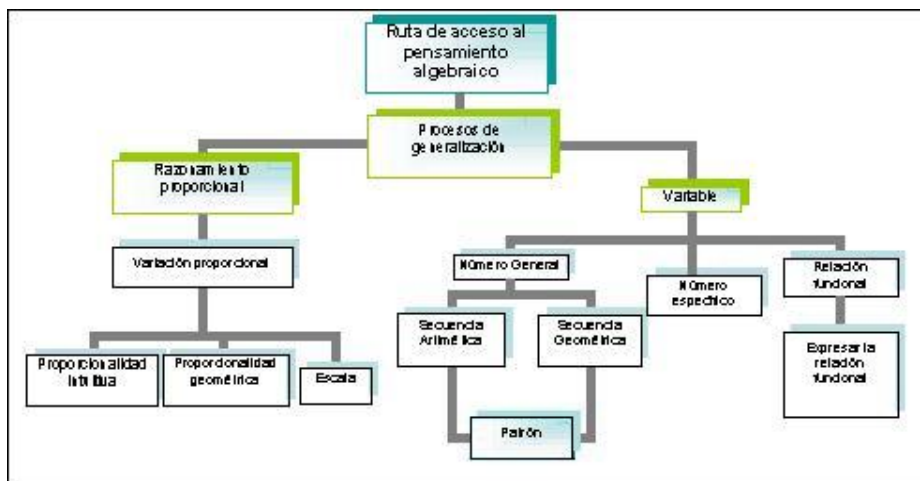


Tabla 1

Nombre del nivel de logro	Caracterización del nivel de logro
Nivel Bajo	Pensamiento aditivo, cuya característica es dar solución a las preguntas únicamente a través de sumas y/o restas, por ello se les dificulta ver patrones y relaciones funcionales.
Nivel medio	Pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, es decir, sólo detectan patrones o visualizan variaciones de una variable pero sin relacionarla con otra.

Tabla 2

Nombre de la categoría	Caracterización
Aritmética	Las respuestas a las preguntas evidencian que han sido resueltas mediante adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, a través de conteos. No detectan patrones geométricos. Perciben cambios de una variable pero no en relación con otra, no expresan reglas generales que las represente.
Categoría Prealgebraica	Las respuestas a las preguntas evidencian que son capaces de ver una variación proporcional o percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden traducir la regularidad a una regla simbólica.

Tabla 3

Tipo de interacción	Parejas de estudiantes
Explicación univocal	ALC-LAV
Explicación multivocal	EFH-YBR
Colaboración indirecta	CED-DLG, CCB-ChLR

Tabla 4

	Aritmética	Pre-Algebraica	Algebraica
Cuestionario inicial	DLG, ALC, EFH	LAV, CED, CCB, CHLR, YBR	
Cuestionario final	DLG	ALC	CHLR, YBR, LAV, EFH, CCB, CED

Imagen 1

8. Observa la siguiente secuencia de figuras

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

¿Cuántos cuadrados llevará la base de la figura que sigue?
7

¿Cuántos cuadrillos tendrá en total la figura?
16

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 5 en su base?
9

Calcula el total de cuadros que tendrá
25

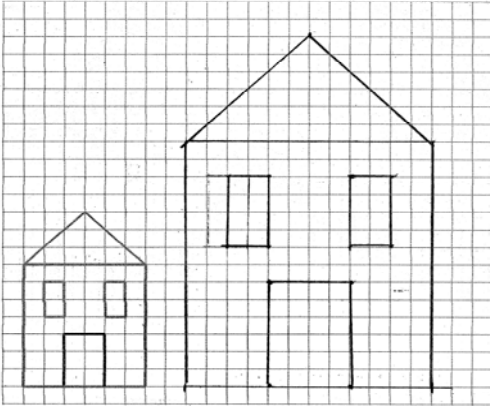
¿Cuántos cuadrados se deben trazar en la base para formar la figura número 10?
19

¿Cómo lo supiste?
sementamos 2 de cada uno

Si ahora se quiere saber cuántos cuadrados tiene en su base la figura 30, ¿Cómo lo encuentras?
sumando 2

Imagen 2

2. Observa la casa pequeña y dibújala dos veces más grande



¿Qué observaste para dibujar la casa más grande?
El número de los cuadros

¿Cómo la dibujaste dos veces más grande?
Dependiendo el número de cuadros y eso duplicarlo por que es al doble.

Imagen 3

¿Qué observaste para elegir la ficha?
la secuencia de los puntos, como iban aumentando y disminuyendo

¿Cómo van cambiando los puntos de las casillas superiores?
aumenta una cada vez

¿Y los de las casillas inferiores?
desaparecen 2

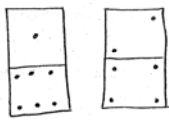
Si llamamos "n" al número de puntos ¿cuál sería la fórmula que representa al cambio de puntos de las casillas superiores?
 $n+1$

¿Cuál es la fórmula para las casillas inferiores?
 $n-2$

Verificalo

$1+1 = 2$

$n-1$



$n-6$

$6-2 = 4$