

---

## UNA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE LA OPERATIVIDAD DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

---

REBECA FLORES GARCÍA / GUSTAVO MARTÍNEZ SIERRA

### RESUMEN:

Como lo refieren Perera y Valdemoros (2007), diversos investigadores han reconocido que las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que manifiestan dificultades tanto para su enseñanza como su aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación; al respecto Fandiño (2005) identifica muchos de los errores “típicos” en los estudiantes en todo el mundo, entre ellos se evidencian las dificultades con las operaciones entre fracciones y entre números racionales, en manejar el adjetivo “igual”, en reconocer los diagramas más comunes y en manipular equivalencias. En esta investigación se considera a la perspectiva socioepistemológica como el aparato teórico que habrá de permitir presentar las ideas generadas en torno a una primera exploración realizada con estudiantes de nivel secundaria del Estado de México, las cuáles involucran la idea de fracción y a algunos de sus significados. Uno de los objetivos de este trabajo es el de determinar cuántos y cuáles son los significados de la noción de fracción que trascienden en su operatividad, por lo que se desarrollo un primer acercamiento exploratorio aplicando un cuestionario a estudiantes de una escuela secundaria (del Estado de México) que pudiera dar cuenta de algunos de esos significados, por lo que presentamos algunos de los resultados obtenidos. Finalmente se agregaron algunas de las conclusiones a las que se llegaron para poder continuar con el estudio.

**PALABRAS CLAVE:** construcción, significado, operatividad, fracción, socioepistemología.

### INTRODUCCIÓN

De acuerdo con el Programa de estudio para la escuela secundaria (SEP, 2006): *el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo podrá ser importante cuando los alumnos lo puedan usar de manera flexible, para solucionar problemas. De*

---

*ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, ya sea en términos de lenguaje, como de representaciones y procedimientos. A su vez, en el Libro para el Maestro (SEP, 2001) se menciona que uno de los temas más conflictivos tanto para el maestro en cuanto a su enseñanza como para el alumno en su aprendizaje es el correspondiente al tema de fracciones.*

Al respecto y a través de una breve indagación en el programa de matemáticas referido se tiene que de los 38 temas incluidos para el primer grado, 16 corresponden al tema de fracciones: su noción y operatividad.

Ahora bien, diversos han sido los estudios desarrollados alrededor de la noción de fracción como lo señala Fandiño (2005) en una de cuyas investigaciones reporta tres etapas en las que se incluyen las tendencias sobre las que giraban y giran actualmente dichos trabajos.

En el documento que se presenta se describe un reporte parcial de investigación acerca de la construcción de significado de la noción de fracción y de la operatividad correspondiente. Estudio que se desarrolla bajo la Aproximación Socioepistemológica; la cual considera cuatro dimensiones que determinan la construcción del conocimiento en el ser humano: la didáctica, la cognitiva, la epistemológica y la social.

### **PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS**

Como ya se advirtió, la noción de fracción y la operatividad correspondiente aun cuando se consideran de gran importancia, presentan serias dificultades tanto para su enseñanza como su aprendizaje por lo que se desarrolla en la actualidad una investigación denominada: Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios, con la que se pretende responder a las siguientes preguntas:

- 
- ¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción en el nivel secundaria?
  - ¿Cómo utilizarlos para construir un significado en la operatividad de los números fraccionarios?
  - ¿Existe algún modelo que integre los distintos significados de la noción de fracción para su enseñanza?

Entre los objetivos del estudio se encuentran:

- Caracterizar los significados surgidos a partir del estudio desarrollado en el ámbito escolar.
- Determinar cuántos y cuáles de esos significados trascienden en la operatividad con los números fraccionarios buscando establecer una propuesta que integre los distintos significados para su enseñanza.
- Utilizar algunos de los resultados que han sido generados a lo largo de las investigaciones para intentar proponer una posible ruta que guíe la enseñanza y el aprendizaje.

### **INVESTIGACIONES RELACIONADAS**

En la actualidad se realiza una exploración acerca del estado del arte, el cual de acuerdo con Fandiño (2005) y otros, reportan investigaciones en las que se incluyen las tendencias sobre las que giraban y giran actualmente dichos trabajos. Fandiño describe tres períodos: de 1960 a 1980, de 1980 a 1990 y de 1990 hasta la actualidad; cuyas características se describen brevemente a continuación:

Respecto al periodo de 1960 a 1980 se tuvo una gran cantidad de estudios con alumnos de entre 14 y 18 años, particularmente en los Estados Unidos; sobresaliendo los estudios relacionados con el concepto de fracción, estudios relacionados con operaciones entre fracciones y dificultades relacionadas con

---

ellas; y los estudios vinculados con las diferentes interpretaciones de la idea de fracción.

De este periodo los aportes alcanzados por Kieren evidencian la existencia de siete significados para el término “fracción”, mostrando que una de las principales dificultades para su aprendizaje, ligada tanto con el concepto como con las operaciones, es precisamente esa multiplicidad de significados.

En el periodo de 1980 a 1990 se desarrollaron trabajos bajo cuatro directrices: 1) aprendizaje en general, 2) aprendizaje de operaciones con fracciones, 3) comparaciones entre los valores de las fracciones y/o números decimales y las dificultades en la expansión de los números naturales a las fracciones o a decimales y 4) problemas relacionados con las diferentes interpretaciones de la noción de “fracción”.

En este periodo aparecen dos cuestiones centrales que habrán de proporcionar un panorama más amplio en torno a las investigaciones presentadas:

- Aparecen artículos de Guy Brousseau citado por Fandiño, 2005, relacionados con la enseñanza de los números decimales, basado en experiencias durante la década de los 70's en una escuela primaria de Francia. Sus escritos han sido fundamentales para la evolución de la Educación Matemática y demuestran una nueva metodología denominada “epistemología experimental”, dando lugar a una nueva idea de investigación en Educación Matemática. Brousseau da continuidad a su investigación alcanzando a establecer en 1986, como lo menciona Montiel (2005), la Teoría de Situaciones Didácticas; sentando así las bases para una disciplina científica encargada de analizar y teorizar sobre los fenómenos didácticos que brotan de la interacción sistémica del profesor y el estudiante respecto de un saber matemático escolar específico.

- 
- Otra contribución importante fue el proyecto del Número Racional desarrollado en Estados Unidos de 1979 al 2000.

De 1990 a la actualidad se observaron investigaciones referidas a áreas más específicas (para estudiantes de entre 6 y 14 años de edad), tales como fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones como: fracciones y números racionales y fracciones y números decimales; sobresalen los trabajos de Valdemoros (citada por Fandiño, 2005), quien proporciona una amplia diversidad de perspectivas sobre el lenguaje de las fracciones, centrando su atención en la construcción del significado a través de diferentes sistemas simbólicos y referentes a los materiales y a los modelos concretos.

Fandiño (2005) en su obra destaca los siguientes significados para la noción bajo estudio:

- 1) La fracción como parte de un todo; a veces continuo, a veces discreto.
- 2) La fracción como cociente.
- 3) La fracción como razón.
- 4) La fracción como operador.
- 5) La fracción en probabilidad.
- 6) La fracción en los puntajes.
- 7) La fracción como número racional.
- 8) La fracción como punto de una recta orientada.
- 9) La fracción como medida.
- 10) La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo.
- 11) La fracción como porcentaje.
- 12) La fracción en el lenguaje cotidiano.

---

13) La conceptualización de la fracción en la teoría de Vergnaud.

14) La conceptualización signo - objeto de Duval.

Una conceptualización más de fracción es la referida en la Fenomenología Didáctica de Hans Freudenthal.

### **MARCO TEÓRICO**

Cantoral y Farfán (2003) caracterizan los enfoques teóricos desarrollados en la Matemática Educativa a través de cuatro visiones para plantear una problemática didáctica: *una didáctica sin alumnos, una didáctica sin escuela, una didáctica sin escenarios y una didáctica en escenarios socioculturales*. Éstas dan cuenta de las distintas formas de entender los fenómenos que sobre la enseñanza y el aprendizaje se manifiestan dentro de la Matemática Educativa. Centraremos nuestra atención en la última de las visiones, ya que ha dado lugar al surgimiento de un nuevo enfoque sistémico planteado en la Matemática Educativa a través de investigaciones que añaden la dimensión social del conocimiento matemático para estudiar el entorno y las circunstancias ligadas a la aparición y construcción de conocimiento matemático.

Dicha perspectiva es llamada por Cantoral y Farfán “una didáctica en escenarios socioculturales” situando así el nacimiento de la *aproximación socioepistemológica*, en el que se propone una manera diferente de mirar una problemática didáctica a través de un estudio sistémico empleando cuatro dimensiones de estudio: la dimensión epistemológica, la didáctica, la cognitiva y la social.

### **MARCO CONCEPTUAL**

Algunos referentes conceptuales necesarios corresponden a las nociones de: construcción, significado, operación y relación (especialmente la noción de relación de equivalencia); por lo que, elementos de soporte teórico provienen tanto de la matemática misma (nociones formales) como de aquellas teorías

---

desarrolladas acerca de la Matemática y su enseñanza; entre éstas, algunas abordadas por: Piaget, D'Amore, Chevallard, Kieren, Brousseau y de investigaciones relacionadas:

Piaget (Moreno, SF), es quien establece que la idea central del pensamiento epistemológico es el constructivismo, en el que a lo largo de su desarrollo, el sujeto va elaborando no sólo conocimientos sino también estructuras mediante las cuales alcanza ese conocimiento. El sujeto construye su conocimiento del mundo y construye su propia inteligencia. En ese sentido la epistemología genética se propone revelar cómo la interacción entre el sujeto y el objeto genera el conocimiento.

D'Amore (2005) hace referencia a comprender el concepto, ya que habrá de ser reflexionado como el acto de *adquirir su significado*, resaltando que tal acto será posiblemente *un acto de generalización y de síntesis de significados* en relación con elementos particulares de la *'estructura' del concepto*, siendo ésta una red de significados de los enunciados considerados. En los que estos significados particulares habrán de ser adquiridos con actos de comprensión. La metodología de los actos de comprensión se preocupa por el proceso de construir el significado de los conceptos.

La noción de objeto matemático, propuesta por Chevallard (1991) y retomada por D'Amore (2005), procede de un sistema de praxis donde se manejan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones; dicho de otro modo: aquello que es posible dibujar o escribir.

Por su parte Kieren, T (1988), ha desarrollado (para los números racionales) un modelo teórico de construcción de conocimiento, caracterizando la matemática intuitiva, que intenta tomar en cuenta las características personales y matemáticas de tal tipo de construcción de conocimiento. Dicho modelo está

---

precedido por una red de subconstructos de número racional que forma un sistema ideal personal de conocimiento acerca del número racional.

Por otro lado Brousseau, et al (2008) afirman que al presentar a los conceptos matemáticos a través de Situaciones Didácticas específicas, se incluye la presentación de objetos con diferentes estructuras matemáticas en diferentes roles y en ambientes diferentes antes de que éstas sean reconocidas como isomorfas. De tal forma que muestra a las fracciones como medida, como razones y como funciones lineales de manera separada, y no al mismo tiempo como lo presenta la currícula tradicional. Destacándose así dos puntos importantes al crear situaciones didácticas, *buscando ofrecer a los profesores:*

- *Recursos de enseñanza de nociones matemáticas más cercanas a su definición actual y a los usos que aquellas de las formas estándares y*
- *Obtener el aprendizaje de esta matemática como un efecto de actividad matemática más auténtica en la parte correspondiente a los estudiantes.*

## **METODOLOGÍA**

Este estudio por su naturaleza, posee tanto elementos de carácter teórico, como de carácter curricular, así como de carácter exploratorio. El aspecto teórico puede observarse en algunos de los párrafos anteriores; el aspecto curricular está referido al tratamiento que, tanto en los programas de estudio como en libros de texto, se realiza acerca de la noción de fracción y su operatividad. Respecto al aspecto exploratorio, tres serán los momentos a considerar: 1. Una primera aproximación sobre significados en torno al objeto de estudio (cuyos resultados servirán para una mejor orientación de los dos momentos subsecuentes); 2. Una profundización a través de entrevistas a estudiantes y profesores acerca del objeto de estudio en referencia; 3. Aplicación a estudiantes de un cuestionario que incluya situaciones, problemas o actividades propuestos en libros de texto vigentes. Los resultados obtenidos serán confrontados con aquellos reportados por investigadores calificados con la finalidad de construir



---

respuestas a las preguntas inicialmente formuladas y que le dan sentido al trabajo que se expone.

A continuación se hace una breve presentación de los resultados obtenidos en la aplicación de un cuestionario aplicado a 89 estudiantes de una escuela secundaria (31 de primer grado, 26 de segundo grado y 32 del tercer grado) del Estado de México, en el mes de enero de 2009, la cual se caracteriza por pertenecer a una comunidad rural ubicada bajo las faldas del Nevado de Toluca.

El instrumento aplicado incluyó 6 preguntas; una para cada una de las nociones: matemáticas, número, fracción, decimal, porcentaje y equivalencia; en un formato que demandaba a cada estudiante el escribir 5 palabras que vinieran a su mente al leer la noción escrita. La organización de las respuestas obtenidas fue de la siguiente manera:

- a) Se organizaron las respuestas de manera tal que se pudieran contabilizar “buscando” aquellas que sobresalían por ser de mayor frecuencia. Obteniendo con ello un conjunto de categorías.
- b) A partir de esas categorías se buscaron aquellas respuestas que se vinculaban o asociaban con ellas.
- c) Estas categorías y sus asociaciones fueron jerarquizadas en tablas.
- d) A partir de las tablas obtenidas se elaboró un análisis y un reporte de resultados; de los cuales se ocupa la siguiente sección.

## **RESULTADOS**

Respecto a la pregunta 1: Dame 5 frases o palabras que te vienen a la mente cuando escuchas la palabra “matemáticas”.

Los estudiantes se inclinaron a relacionar la palabra matemáticas con las nociones de: número, operación y problemas (tabla 1). La operación de adición fue la de mayor frecuencia entre los estudiantes del primer y segundo grado, mientras que para el tercer grado fue la multiplicación.

<b>PRIMER GRADO</b>		
	<b>Aspectos</b>	<b>F</b>
1	Suma, sumas, sumar	15
2	Multiplicación, multiplicaciones	14
3	Número, números	12
<b>SEGUNDO GRADO</b>		
	<b>Aspectos</b>	<b>F</b>
1	Suma, sumar, cuentas, sumas	15
2	Resta, restar, restas	10
3	Multiplicar, multiplicación, multiplicaciones	10
<b>TERCER GRADO</b>		
	<b>Aspectos</b>	<b>F</b>
1	Número, números, cantidades	16
2	Problemas, problemas a resolver, problemas matemáticos	15
3	Operaciones, hacer operaciones, operaciones básicas	10

**Tabla 1**

Respecto a la pregunta 2: Dame 5 frases o palabras que te vienen a la mente cuando escuchas la palabra “número”.

Las categorías emergentes fueron: contar, operación y fracción. Evidenciando uno de los usos de los números: el contar; así como el de operar. El hecho hacer manifiesta la noción de fracción permite que reconozcamos que los estudiantes tienen idea del número natural (expuesta implícitamente en la noción de contar) como del número fraccionario. Podríamos afirmar también, que los estudiantes cuentan con elementos provenientes de la noción matemática de Estructura, entendiendo a ésta como un conjunto no vacío constituido de entes que incluye operaciones entre ellos (las cuáles poseen propiedades).

---

Respecto a la pregunta 3: Dame 5 frases o palabras que te vienen a la mente cuando escuchas la palabra “fracción”.

Que por nuestro interés en este estudio, así como por el tipo de respuestas obtenidas, representa una pieza importante, se hicieron manifiestas las siguientes categorías: división, parte todo, equivalencia, decimal, proporción, medida, operador y porcentaje. Categorías que nos ofrecen pistas acerca de significados diversos de la noción de fracción, significados ya advertidos por teóricos reconocidos. Los significados emergentes son los de cociente, parte todo, razón, medida, operador, porcentaje y (sutilmente) racional (a través del significado de equivalencia).

Respecto a la pregunta 4: Dame 5 frases o palabras que te vienen a la mente cuando escuchas la palabra “decimal”.

Las categorías manifiestas fueron: número y operación (enfaticando nuevamente la de adición). Respecto a la asociación que los estudiantes hacen del decimal con la noción de número cabe señalar que centran sus respuestas en números mayores que 0 y menores que 1. Lo que nos permite reconocer una posible interpretación de la noción como parte todo y que seguramente advierte de posibles dificultades de la noción fracción que sean diferentes a ella.

Respecto a la pregunta 5: Dame 5 frases o palabras que te vienen a la mente cuando escuchas la palabra “porcentaje”.

Las categorías asociadas fueron: cosas, números, descuentos, la de representación tipo pastel; por lo que parecen resultar asociaciones debido a posibles usos cotidianos y a una relación con la noción de fracción (parte todo) ya explícita en las respuestas a la pregunta 3.

Respecto a la pregunta 6: Dame 5 frases o palabras que te vienen a la mente cuando escuchas la palabra “equivalencia”.

Las categorías surgidas resultaron ser: equilibrio, igual igualdad, parecido a. Categorías que apuntan a la noción de igualdad. Asunto que habrá de ser

---

considerado con mayor cuidado por lo que representa; al avanzar en este estudio. Por ejemplo; ¿qué tan igual es el hecho de considerar  $2/3$  como  $4/6$ ?

## **CONCLUSIONES**

Como pudo verse, algunas derivaciones obtenidas de los datos reportados guardan relación con el hecho de que la Aritmética es una de las ramas de la Matemática reconocida por los estudiantes de la escuela secundaria; y en ésta sobresale (implícitamente) la noción de estructura; entendiéndola como un conjunto de números en las que se incluyen operaciones entre ellos. Los números reconocidos son los naturales y los fraccionarios, así como las operaciones básicas entre éstos. Los significados asignados a la noción de fracción; por parte de los estudiantes, son: cociente, parte todo, razón, operador, medida, porcentaje y racional (esto último de manera sutil).

Para algunos de esos significados se asocian posibles usos de la noción; la cual abre la puerta para hacer planteamientos desde las perspectivas teóricas sugeridas por T. Kieren y B. D'Amore en cuanto a la construcción de significado de la noción Fracción desde una visión pragmática y no realista. (ver D'Amore (2005)).

## **REFERENCIAS**

- Brousseau, G. *et al.* (2008). "Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3. Rationals and decimals as linear functions", *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, 153- 176
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). "Matemática Educativa: Una visión de su evolución", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México. Reverté.
- Fandiño, M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*, tesis de doctorado en la Universidad de Bologna, Italia.

- 
- Kieren, T. (1988). "Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development", en J. Hiebert, y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 162-181
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*, tesis de doctorado no publicada en CICATA-IPN, México.
- Moreno, L. (SF). *Apuntes de epistemología genética*. Copia manuscrita.
- Perera, P y Valdemoros, M (2007). "Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria", *Investigación en Educación Matemática XI*, 209-218
- SEP (2001). *Libro para el maestro. Educación Secundaria*. México: SEP.
- SEP (2006). *Programas de Estudio 2006. Educación básica, Secundaria, Matemáticas*. México: SEP.