LA HABILIDAD PARA TRADUCIR ENUNCIADOS DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE MATEMÁTICO Y ALGUNAS DE LAS DIFICULTADES PARA SU DESARROLLO

JOSÉ LUIS RAMÍREZ ALCÁNTARA / CÁNDIDO MANUEL JUÁREZ PACHECO

RESUMEN:
En este reporte se describen algunas de las dificultades que tienen los estudiantes de posgrado de Ciencias de la computación, relacionadas con las diferentes formas de expresar en un lenguaje semi-formal las definiciones de los conceptos estudiados (elementos básicos de conjuntos, relaciones y funciones) y los que surgen al tratar de aplicar el lenguaje de la Lógica de primer orden (LPO) en la identificación de la estructura lógica de los enunciados. Las dificultades se identificaron en un curso *on-line* cuyo objetivo era propiciar el desarrollo de la habilidad para leer un texto de matemáticas. La tarea central planteada a los estudiantes fue traducir las definiciones del lenguaje matemático al lenguaje natural y viceversa. En la traducción los estudiantes utilizaron un conjunto de orientaciones para la dirección de ese proceso, que previamente se les había proporcionado. Mediante el análisis basado en la teoría de la actividad y en el seguimiento de las producciones de los estudiantes durante el curso, de cinco semanas de duración, se reconocieron problemáticas ya reportadas –el uso de los cuantificadores y su negación y la confusión en la interpretación de los conectivos lógicos– y se identificaron nuevas, en particular, la mezcla inadecuada del lenguaje de la LPO y del lenguaje matemático al utilizar las definiciones de los conceptos matemáticos. Esta confusión en el uso de los dos lenguajes es un obstáculo para el desarrollo de la habilidad a desarrollar.
PALABRAS CLAVE: Lenguaje matemático, Definiciones en matemáticas, Teoría de la actividad, Matemáticas discretas.

INTRODUCCIÓN

Actualmente en las áreas de informática y computación el volumen de conocimientos crece, evoluciona muy rápidamente y se tiende a expresarlo formalmente. Los conocimientos expresados de manera formalizada hacen uso, en muchas ocasiones, del lenguaje de la Lógica de primer orden (LPO) como suele pasar por ejemplo, en el área de Ingeniería de software, Inteligencia artificial, Web semántica, etc.

Desde hace varios años, en el área de ciencias de la computación, se han hecho diversas propuestas para incluir en la currícula los denominados *Métodos formales (Dean y Boute, 2004; Boca, Bowen y Duce, 2006)*. Los estudiantes deben desarrollar las habilidades necesarias para leer y escribir especificaciones formales que faciliten su práctica profesional (Wordsworth, 1996; Parnas, 1996; Garlan, 1996; Wing, 1996; Foster y Barnett, 1996).

El primer acercamiento que tienen los estudiantes de estas áreas con el lenguaje formalizado o semi-formalizado (lenguaje en el que se emplean los símbolos específicos del área de conocimiento pero sin definir una sintaxis precisa para la escritura de sus expresiones) es en el curso de Matemáticas discretas donde se estudia la LPO como un sistema deductivo (Gries, 1991; Gries y Schneider, 1995; Reinfelds, 1996). En dicho curso, los estudiantes tienen que comprender el uso del lenguaje de la LPO y al mismo tiempo deben dominar el lenguaje matemático pero, en general, la mayoría de los que ingresan o egresan del nivel universitario en nuestro país, desconocen el lenguaje de la LPO y el de las matemáticas, por lo cual tienen problemas para comprender y comunicar los nuevos conceptos o conceptos más complejos de su disciplina de estudio *(Ortega, 2007).*

Las dificultades en la comprensión del lenguaje matemático se acentúan cuando se estudian las definiciones de los conceptos en textos semi-formalizados, dando como resultado que la mayoría de los estudiantes no puedan leerlos. Cuando los estudiantes tienen que leer un texto semi-formalizado, ya sea de matemáticas o de la propia disciplina, la estrategia típica es leer los enunciados informales y "*darle la vuelta a las definiciones*", perdiendo una parte importante del conocimiento matemático. Esta situación se ha observado sistemáticamente en los cursos de matemáticas discretas que se han impartido en el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) de manera convencional. Ante este hecho se planteó como pregunta de investigación ¿qué dificultades se presentan en el proceso de formalización de enunciados de conceptos de matemáticas, expresados en lenguaje natural, cuando se traducen al lenguaje semi-formalizado de las matemáticas? En este reporte se describen algunos resultados relacionados con el proceso de traducción y la apropiación del lenguaje matemático por los estudiantes.

ANTECEDENTES

En los cursos de matemáticas discretas y, en general, de matemáticas del nivel universitario se presentan dificultades recurrentes asociadas con la comprensión del lenguaje matemático, en particular la identificación apropiada de los conectivos lógicos y el uso de los cuantificadores anidados. Estas dificultades las han descrito tanto los investigadores en didáctica de las matemáticas (Duran-Guerrier, 1996; Duran-Guerrier y Arsac, 2003; Dubinsky 1997, Dubinsky and Yiparaky, 2000), como del área de las ciencias de la computación (Wing, 1996; Almstrum, 1999; Barwise, J. y Etchemendy, J., 1998). De manera específica, las dificultades que se han reportado se refieren a la negación de los enunciados en matemáticas (Barnard, 1995; Antonini, 2001; Durand-Guerrier y Ben Kilani, 2004), las dificultades para traducir (o formalizar) enunciados del lenguaje natural al lenguaje formal de la LPO (Barker-Plummer, D., Cox, R. Dale R. y Etchemendy J.,2008; Oller, 2000; Hersh, 1997; Ramírez, 2000) y las dificultades para identificar la estructura lógica de los enunciados en matemáticas (Selden and Selden, 1995).

Como respuesta a estas problemáticas se han propuesto diferentes alternativas para propiciar que los estudiantes, en el primer año de licenciatura, logren desarrollar las habilidades necesarias para comprender tanto el lenguaje de las matemáticas como el uso del lenguaje de la LPO en diferentes métodos formales aplicados en las ciencias de la computación. En el caso de las matemáticas se busca que el estudiante comprenda dicho lenguaje y pueda reconocerlo en las definiciones y en las demostraciones de los teoremas. Las propuestas han hecho explícito el lenguaje lógico que se usa en el lenguaje matemático y se muestran esquemas de razonamiento o deducción tratando de preparar a los estudiantes para las demostraciones en matemáticas (Velleman, 1977; Stewart y Tall, 1997; Esty, 1994; Gries y Schneider, 1993).

REFERENTES TEÓRICOS

Este trabajo se fundamenta en la *Teoría de la actividad,* particularmente en los conceptos de *Zona de desarrollo próximo* e *interiorización* (Vigotsky, 1988), *Actividad* (Leontiev, 1984), *Formación por etapas de la actividad cognoscitiva* y las *Bases de orientación para guiar el proceso de asimilación* (Galperin, 1976). En el aprendizaje de las matemáticas la interiorización se asocia con el desarrollo de habilidades (Tallizina, 1980). Hernández (1999) definió un sistema básico de habilidades matemáticas que se utilizó para formular los objetivos del curso y las bases de orientación requeridas por los estudiantes. Se planteó como propósito del curso el propiciar el desarrollo de la habilidad de lectura de un texto de matemáticas y se proporcionaron a los estudiantes bases de orientación para: a) formalizar enunciados del lenguaje natural con el lenguaje de la LPO, b) traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa.

EL CURSO *ON LINE*

El curso preliminar *on line* "Fundamentos de ciencias de la computación" tuvo una duración de cinco semanas entre julio y agosto del 2008 y se desarrolló en la plataforma Moodle (V. 1.8), comprendía cinco unidades (Lógica y lenguaje matemático, conjuntos, relaciones, funciones y aplicaciones). El grupo estuvo formado por 20 estudiantes aceptados al programa de maestría en Ciencias de la computación del CENIDET. Eran ingenieros en sistemas computacionales o licenciados en informática y estaban ubicados en diversos estados de la república mexicana. Los participantes en el curso realizaron actividades individuales, en parejas y grupales (ejercicios propuestos en el material y las autoevaluaciones), las cuales se desarrollaron de forma asíncrona (correos electrónicos, foros, lectura individual y auto evaluaciones) y síncrona (Chat). Para los propósitos de esta investigación se analizaron las producciones de dos estudiantes (E1 y E2) en las que se muestra la forma en que ellos aplicaron las bases de orientación que se les proporcionaron y algunos de los errores que cometieron en el proceso de traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa.

RESULTADOS

La interacción entre pares a distancia se mantuvo constante durante todo el curso, inicialmente con algunas dificultades inherentes a las dificultades del contenido y de la forma de trabajo. A mediados de la tercera semana los estudiantes ya podían discutir diversos aspectos de la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático haciendo uso de la base de orientación explicada en el material de estudio. Esta base contenía la forma de hacer la traducción de un lenguaje a otro en cuatro etapas: a) traducción literal, b) eliminación de conectivos implícitos e incorporación de las definiciones de los conceptos matemáticos, c) escribir una oración en lenguaje coloquial y, finalmente, d) comprobar si dicha oración preserva el sentido de la expresión original. En los primeros ejercicios de traducción los estudiantes hicieron explícita la estrategia de forma incompleta como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Uso de la base de orientación para traducir un enunciado del lenguaje matemático al lenguaje natural

<table>
<tr><td colspan="2">Ejercicio 1. Explicar el significado de las siguientes expresiones del lenguaje matemático:
c) Si $x, y \in R$, $xy \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$</td></tr>
<tr><td>E1</td><td>E2</td></tr>
<tr><td>PASO 1: Si x, y son elementos de los números reales, entonces su multiplicación será mayor o igual a 0 si y solo si x es mayor o igual a 0 y y es mayor o igual a 0.
PASO 2: Dados dos números reales, su multiplicación será mayor o igual a 0, si y sólo si ambos números son reales positivos.
“La multiplicación de 2 números reales positivos es un número real positivo”</td><td>Si dos números “x” y “y” son reales, entonces su producto será mayor o igual a cero, si y sólo si ambos son iguales o mayores a cero.
De otra forma:
“Cuando dos números son reales y positivos su producto es positivo”</td></tr>
</table>

Para explicar el significado de la expresión matemática proceden a traducirla al lenguaje natural, el E1 usa tres etapas para traducir el enunciado y el E2 solo aplica dos de ellas. En la oración final ambos omiten el hecho de que alguno de los números o los dos sean cero. En general, la mayoría de los estudiantes cometen el error de eliminar información que ya habían identificado en las etapas previas y no revisan la oración final para contrastarla con la original. Los estudiantes, en ese momento del curso, daban indicios de su interiorización de las bases de orientación proporcionadas.

En la cuarta semana del curso, los estudiantes ya habían practicado la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la LPO y al lenguaje matemático, en ese momento, se iniciaba el trabajo de reconocer la estructura lógica de un enunciado, tanto del lenguaje natural como del lenguaje matemático. En la tabla 2 se muestran las respuestas de E1 y E2 donde intentan describir la estructura lógica de los enunciados y tratan de expresarlos con los símbolos matemáticos básicos.

Tabla 2

<table>
<tr><td colspan="2">Ejercicio 3. Analice la forma lógica de los siguientes enunciados y exprésela utilizando los símbolos matemáticos básicos:
a) Si $A \subseteq B$, entonces A y $C - B$ son conjuntos disjuntos.</td></tr>
<tr><td>E1</td><td>E2</td></tr>
<tr><td>a) La forma lógica base es: $P(x) \Rightarrow Q(x)$
Sustituyendo $P(x)$ por símbolos que indiquen que $A \subseteq B$ y $Q(x)$ por símbolos que indiquen que A y C-B son disjuntos, tenemos:
$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B \approx A \subseteq B$
Los conjuntos disjuntos se pueden representar de la siguiente manera $A \cap (B\text{-}C) = \varnothing$, o bien se puede representar de la siguiente forma:
$(x \in A \mathbin{\bar{\vee}} x \in (C - B))$, poniendo su equivalencia $((A \mathbin{\bar{\vee}} B) \approx (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$, y luego entonces:
$(x \in A \wedge x \notin (C - B)) \vee (x \notin A \wedge x \in (C - B))$, resolviendo
$(x \in A \wedge (x \notin C \vee x \in B)) \vee (x \notin A \wedge (x \in C \wedge x \notin B))$, este viene siendo $Q(x)$.
Uniendo las dos partes nos queda:

<u>$(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow (x \in A \wedge (x \notin C \vee x \in B)) \vee (x \notin A \wedge (x \in C \wedge x \notin B))$</u></td><td>Si (P) x $\Rightarrow$ (Q)x
Si $A \in B \Rightarrow A \cap (B \cup C) \in \varnothing$
$\forall$x($x \in A \wedge x \in B$) $\Rightarrow$ $A \wedge (B \vee C)$ $\in \varnothing$</td></tr>
</table>

En la repuesta de E1 se observa cómo reconoce la forma lógica básica del enunciado, después identifica los predicados y los traduce al lenguaje matemático haciendo uso de las definiciones necesarias. Finalmente escribe el resultado usando los símbolos matemáticos básicos. E2 identifica correctamente la estructura lógica del enunciado pero, al hacer uso de las definiciones matemáticas a que se hace referencia comete varios errores: a) al iniciar la traducción del enunciado, identifica el hecho de que A sea subconjunto de B con la relación de “ser elemento de”, además, traduce literalmente la expresión “A y C – B son conjuntos disjuntos” de la forma $A \cap (C \cup B) \in \varnothing$ en la que identifica el “y” con la intersección; la diferencia de los conjuntos C y B la describe como la unión de ellos, además indica que el conjunto resultante es elemento del conjunto vacío; b) en la expresión final, en la que cuantifica a la variable x, no usa la definición de subconjunto y cambia los símbolos de las operaciones de unión e intersección por el “y” y el “o” lógicos, quedándole una expresión en la que mezcla el lenguaje matemático con el lenguaje lógico de una forma inapropiada. Este es uno de los errores que se presentó con frecuencia en las respuestas de los estudiantes, en 12 de los 20 que participaron en el curso *on-line,* del cual no hay referencias en las investigaciones de matemática educativa y ésta es una de las aportaciones de la investigación.

CONCLUSIONES O DISCUSIÓN

El problema de la traducción de un lenguaje a otro está aún abierto y no existen procedimientos para llevarlo a cabo de manera satisfactoria. En ese sentido las bases de orientación aportan heurísticas que permiten dirigir el proceso, pero no garantizan que la traducción sea correcta al aplicarlas.

Como se ha descrito en los resultados los estudiantes del curso utilizaron las bases de orientación en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. También se mostró cómo a pesar de que se utilizan las bases de orientación algunos estudiantes siguen presentando errores en la traducción, este hecho permite reflexionar sobre las características de dichas bases, si son apropiadas o se requiere perfeccionarlas de tal manera que den soporte a los estudiantes en el proceso de traducción y se minimicen los errores.

La mezcla inadecuada de los lenguajes lógico y matemático es un error, que en el desarrollo de la habilidad, retraza la comprensión de los enunciados matemáticos y la forma de usar las definiciones.

La interiorización y el desarrollo de la habilidad son procesos largos de los cuales sólo se muestra un segmento, se requiere la descripción completa del proceso como contexto de lo aquí mostrado, la cual será objeto de un trabajo futuro.

REFERENCIAS

Almstrum, V. (1999) “The propositional logic test as a diagnostic tool for misconceptions about logical operations”, *Jl. Of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 18(3), 205-224

Barnad, T. (1995). “The impact of ‘meaning’ on students’ ability to negate statements”, *Proceedings of the 19th PME Conference*, vol.2, Recife, Brasil, pp. 2-3, 2-10.

Archivos del proyecto (2008). *Conceptos básicos de matemática discreta para estudiantes de la maestría en ciencias de la computación: un curso a distancia desde el CSCL y la Teoría de la Actividad*. CENIDET. DDaEI-10-2008. Cuernavaca, Mor. México.

Barwise, J. y Etchemendy, J. (1998). “Computers, visualization, and the nature of reasoning”, En T. W. Bynum y J. H. Moor, (Eds.) *The Digital Phoenix: How Computers are Changing Philosophy* (pp 93-116). Londres: Blackwell.

Barker-Plummer, D.; Cox, R.; Dale R. y Etchemendy J. (2008). “An empirical study of errors in translating natural language into logic”, *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the Cognitive Science Society (CogSci 2008)*.

Boca, P.; Bowen, J. P. y Duce, D. A. (Eds.) (2006). *Teaching Formal Methods: Practice and Experience, Electronic Workshops in Computing (eWiC),* Londres :BCS.

Dean, C.N. y Boute, R.T. (Eds.) (2004). “Teaching formal methods”, *Proceedings of CoLogNET/FME Symposium, TFM*, Ghent, Bélgica, noviembre 18-19, vol. 3294.

Dubinsky, E. (1997) “On learning quantification, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(213) 335-362

Dubinsky, E. y Yiparaki, O. (2000). “On student understanding of AE and EA quantification”, CBMS *Issues in Mathematics Education*, 8, 239–289.

Durand-Guerrier, V. y Ben Kilani, I. (2004). “Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien”, *Les Cahiers du Français Contemporain,* 9, 29-55.

Durand-Guerrier, V. y Arsac, G. (2003). “Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques?”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295-342.

Durand-Guerrier, V. (2003). “Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective”, *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.

Esty,W. W y Teppo, A. R. (1994). “A general-education course emphasizing mathematical language and Reasoning”, *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 16(1), 13-35.

Foster, J. A. y Barnett, M. (1996). “Moore formal methods in the classroom: A how-to manual”, en Dean N. y Hinchey M. (Eds.). *Teaching and Learning Formal Methods* (p 79-98). Academic Press.

Galperin, P.Y. (1976). *Introducción a la psicología. Un enfoque dialéctico*. Madrid: Pablo del Río.

Garlan, D. (1996). “Effective formal methods education for professional software engineers”, en Dean N. and Hinchey M. (Eds.). *Teaching and Learning Formal Methods* (p 11-30). Academic Press.

Gries, D. y Schneider, B. (1995). A new approach to teaching mathematics. *PRIMUS V*, 2 p. 114-115

Gries y Schneider (1993). *A logical approach to discrete math*. Verlag.

Gries, D. (1991). “Improving the curriculum through the teaching of calculation and discrimination”, *Comunications of the ACM, 34(3)* p. 47.

Hernández, H. (2001) “Sistema Básico de Habilidades Matemáticas”, en Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J. R. y Fernández de Alaiza. *Cuestiones de didáctica de la matemática.* Rosario. Santa Fe. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

Hersh, R. (1997). “Math lingo vs. plain english”, *The American Mathematical Monthly*, vol.104, núm. 1, pp.48-51.

Leontiev, A. N. (1984). *Actividad, conciencia y personalidad*, México: Editorial Cartago Maier.

Oller, C. (2000), “The teaching of formalization in first order logic and its problems” [Resumen]. *Proceedings of First International Congress on Tools for Teaching Logic*.

Ortega, J. F. (2007) “Lenguaje matemático: Una experiencia en los estudios de economía de la UCLM” pp. 1,2 (consultado: 28/05/07 en: www.uclm.es/ab/fcee/D_trabajos/2-2002-5.pdf).

Parnas, D. L. (1996). “Education for computing professionals”, en Dean N. y Hinchey M. (Eds.) *Teaching and Learning Formal Methods* (pp 31-42) Academic Press.

Ramírez J. L. (2000). *Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemáticas y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden*, tesis de maestría, Universidad Autónoma de Barcelona.

Reinfelds, J. (1996). “Logic in CS-1 and CS-2”. *DIMACS Symposium: teaching logic and reasoning in an illogical world* (consultado: 20/06/2000 en http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/Logic/cornellprogram.html)

Selden, A. y Selden, J. (1996). "The role of logic in the validation of mathematical proofs", *The DIMACS Symposium on Teaching Logic and Reasoning*, Rutgers University.

Stewart y Tall (1997). *The foundations of mathematics*. Oxford Science Publications.

Tallizina, N. F. (1998). *Los fundamentos de la educación superior*. México: UAM/Ángeles Editores.

Velleman (1977). *How to prove it.* Cambridge:Cambridge University Press.

Vygotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Wing, J. M. (1996). "Hints to specifiers", en Dean N. y Hinchey M. (Eds.). *Teaching and learning formal methods* (pp 57-78). Academic Press.

Wordsworth, J. B. (1996). "An industrial perspective on educational issues relating to formal methods", en Dean N. y Hinchey M. (Eds.). *Teaching and learning formal methods* (pp 1-9). Academic Press.