LAS FRACCIONES COMO FACILITADORAS O LIMITANTES DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

LUZ PÉREZ QUIRÓZ / JOSÉ LUIS CORTINA MORFÍN

RESUMEN

En esta ponencia se analizan las entrevistas clínicas realizadas a un grupo de 12 alumnos de sexto grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal[1]. Las entrevistas se realizaron con el propósito de identificar los entendimientos matemáticos que logran desarrollar alumnos de sexto grado de primaria entorno al concepto de fracción. Además, se buscó precisar la función de dichos entendimientos para facilitar o dificultar a los estudiantes el acceso a conocimientos más complejos; en particular aquellos que se espera que el estudiantado adquiera durante la educación secundaria, y que son necesarios para la comprensión de muchas situaciones de la vida diaria.

PALABRAS CLAVE: desempeño matemático, fracciones, entendimientos matemáticos.

INTRODUCCIÓN

Las fracciones es uno de los temas que mayor conexión tiene con otros contenidos del plan de estudios de educación básica (primaria y secundaria) y otros más de la educación media superior. El concepto de fracción ha sido reconocido como elemento fundamental en el desarrollo del pensamiento proporcional (Thompson y Saldanha, 2003; Steffe, 2004), y como necesario para enfrentar determinadas situaciones de la vida diaria (Lamon, 2005). Entre ellas se incluye el hacer las compras ("medio kilo de…") y el interpretar información del tipo "el índice de precios y cotizaciones del petróleo subió 2%".

[1] La investigación y el análisis reportado en esta ponencia fueron posibles gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México a través del proyecto 53448. Las opiniones y puntos de vista expresados por los autores no reflejan necesariamente a los del Consejo.

En un análisis del programa vigente de educación secundaria (SEP, 2006), realizado por Pérez (2008), se reconoció que éste fue elaborado partiendo del supuesto de que los alumnos ingresarían a la educación media con un conocimiento suficiente de las fracciones que les permitiera reconocerlas como medidas que expresan el valor de una magnitud, que puede ser mayor, menor o igual a uno y a un medio. Los datos reportados por el Examen de la Calidad y el Logro Educativo (Backhoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., Peon, M., y Bouzas, A., 2006) sugieren que una gran cantidad de estudiantes terminan la primaria en México sin haber adquirido los conocimientos esperados. Por ejemplo, según los resultados de este examen, menos del 1% de los estudiantes de sexto grado cumple con el criterio probabilístico "$P \geq .67$" de responder correctamente un reactivo como el que se muestra en la Figura 1, referente a la equivalencia de fracciones.

Con base en los resultados de la prueba Excale, es razonable suponer que pocos estudiantes mexicanos llegan a la secundaria con la comprensión mínima necesaria del concepto de fracción para poder involucrarse con éxito en las actividades que se prescriben en el plan de estudios. Una limitada comprensión del concepto puede estar obstaculizándole a muchos estudiantes el acceso a los conocimientos que la educación secundaria prescribe y también el poder involucrarse con éxito en muchas actividades de la vida diaria.

Desde una perspectiva constructivista, es válido conjeturar que el origen de muchos de los rezagos en el aprendizaje matemático de los alumnos de secundaria se originan en una comprensión deficiente de conceptos matemáticos básicos, propios de la educación primaria. Sin estas concepciones básicas, los estudiantes pueden no contar con la comprensión matemática mínima necesaria para acceder al contenido preescrito para la secundaria.

Es importante aclarar que esta conjetura no implica que los estudiantes de secundaria rezagados no hayan desarrollado conocimientos que puedan aprovecharse para ayudarles a crecer matemáticamente y acceder, gradualmente, a los contenidos preescritos en el currículo. Solamente considera que los conocimientos con los que muchos de ellos cuentan pueden no ser suficientes para que se beneficien de la enseñanza matemática que el programa de su grado escolar prescribe.

La presente ponencia se fundamenta en un estudio que tuvo como objetivo documentar las nociones que diferentes alumnos de sexto grado de primaria logran desarrollar. Ello con el propósito de informar sobre el diseño de intervenciones educativas que apoyen el desarrollo de los estudiantes a partir de lo que realmente comprenden y no de lo que ya deberían de comprender.

RECOLECCIÓN DE DATOS Y METODOLOGÍA

Los datos analizados provienen de las entrevistas clínicas realizadas a un grupo de 12 estudiantes de sexto grado de primaria de una escuela pública, ubicada en el sur del Distrito Federal. La elección de la institución tuvo como principal criterio ser una escuela pública más o menos típica.

La técnica de investigación utilizada fue la entrevista clínica piagetiana (Piaget, 1978), en la forma en que ha sido adaptada a la educación matemática por Cobb (1986). Se procuró que las actividades representaran un auténtico reto a los estudiantes y se trató de obtener una imagen lo más clara posible de cómo entendían los niños las situaciones que se les presentaban.

En la conducción de las entrevistas se utilizaron dos protocolos. El primer protocolo de entrevista (*Protocolo A*), incluyó notaciones convencionales de las fracciones en un contexto poco utilizado en la escuela. Se anticipó que para algunos estudiantes sería difícil razonar con el tipo de situaciones problemáticas que se incluían en este protocolo. Por ello, se diseño una sección alternativa a la cual se le denominó *Protocolo B*. En esta sección se plantearon algunas de las mismas preguntas del Protocolo A pero sin usar el lenguaje canónico de las fracciones, esto con el fin de identificar nociones matemáticas en los estudiantes, menos formales, que pudieran ser aprovechadas para apoyar su aprendizaje.

Las entrevistas se aplicaron en el mes de marzo de 2007 y tuvieron una duración de 20 a 50 minutos. Fueron video-grabadas y en la conducción de cada entrevista participaron dos investigadores; uno estuvo a cargo de conducir la entrevista y otro se encargó de tomar notas y de intervenir con preguntas que permitieran clarificar el razonamiento de los niños[2].

Para el análisis de las entrevistas se consideraron los lineamientos recomendados por Cobb (1986).

RESULTADOS

En el análisis de las entrevistas se identificaron tres niveles de desempeño. Estos niveles son relevantes porque implican diferencias que sería importante tomar en cuenta a la hora de diseñar una estrategia de intervención pedagógica. A continuación se presenta una descripción de los tres niveles, comenzando por el de mejor desempeño (Nivel 1) continuando con el de desempeño más pobre (Nivel 3) y terminando con el intermedio (Nivel 2).

Nivel 1

En el Nivel 1 fueron ubicados seis estudiantes que no mostraron tener dificultades para responder a las situaciones del Protocolo A. Pudieron comparar correctamente las cantidades representadas por fracciones, en términos de una siendo más grande que la otra o de las dos siendo iguales, aún en un contexto en el que muy probablemente no las habían encontrado, las fracciones a comparar fueron las siguientes: 1/2 vs. 1/3, 1/4 vs. 3/4, 1/3 vs. 2/3, 2/4 vs. 1/2, 4/9 vs. 3/4, 1/2 vs. 5/10, 5/4 vs. 1 entero y vs. 8/9, 8/4 vs. 2 enteros y vs. 18/9.

De manera general, el pensamiento de los estudiantes de este grupo fue flexible, pues fueron capaces de utilizar más de un recurso para justificar sus decisiones. Ellos parecieron contar con la habilidad de concebir a una fracción como una

[2] Le agradecemos a Ericka Renata Cardoso Moreno y a Claudia Zúñiga Gaspar su apoyo en la conducción de las entrevistas.

medida que expresa el valor de una magnitud que puede ser mayor, menor o igual a un medio y a un entero.

Nivel 3

En el tercer nivel fueron ubicados cinco estudiantes, a los cuales pareció dificultárseles entender las fracciones, expresadas de manera canónica, como una medida que expresa el valor de una magnitud. Este grupo de estudiantes inició con el Protocolo A. En la primera actividad se les mostró un dibujo como el que aparece en la Figura 2. Se pidió a los estudiantes que indicaran hasta dónde llegaría el nivel de leche cuando el cartón tuviera la cantidad indicada por la fracción y que señalaran cuál de los dos cartones estaría más lleno o si estarían igual de llenos.

Primero se les pidió que compararan 1/2 con un 1/3. Sólo tres de los cinco estudiantes identificaron la fracción 1/2 como una cantidad que representaba la mitad del litro de leche. Ninguno reconoció que 1/2 representaba una cantidad mayor a 1/3.

Cuando se les pidió que compararan 1/3 y 1/4, ninguno de los estudiantes identificó al tercio como más grande que el cuarto (Ver Figura 3a y 3b). En general, estos estudiantes no parecieron entender qué significaba el numerador y el denominador de una fracción. Parecían interpretar a una fracción no como un símbolo que expresa una cantidad, sino como dos números independientes, al menos en el contexto de los cartones de leche.

Con base en las dificultades que mostró este grupo de estudiantes, se consideró que las actividades del Protocolo A rebasaban sus habilidades matemáticas; por ello, se les presentaron las actividades del Protocolo B. La primera actividad del protocolo B que se le presentó a los estudiantes implicó identificar tamaños representados por fracciones convencionales usando círculos y rectángulos. En la primera situación se presentó un círculo dividido en dos partes iguales, con una de ellas sombreada y las fracciones 1/2, 1/4, 1/3 y 1/4 debajo de esta figura (Ver Figura 4a). La segunda situación incluyó otro círculo dividido en tres partes iguales con una de ellas sombreada, con las fracciones 1/2, 1/4, 1/3 y 1/4 debajo de esta figura (Ver figura 4b). La tercera situación incluyó un rectángulo dividido en ocho partes con cuatro de ellas sombreadas y con las fracciones 1/2, 1/4, 2/4 y 4/8 escritas debajo de la figura (Ver Figura 4c).

Se pidió a los alumnos que en cada dibujo identificaran la fracción que estaba representada por la parte sombreada e indicaran si alguna otra de las fracciones podía representarla. En el primer círculo todos los alumnos fueron capaces de identificar 1/2 como la fracción representada por la parte sombreada, también la identifican como la mitad del entero. Uno de los estudiantes también identificó 1/4 como la parte sombreada del círculo, aunque después cambió de opinión.

En el segundo círculo todos los estudiantes identifican 1/3 como la única fracción que correspondía a la parte sombreada. Al parecer se guiaron por el número de divisiones hechas al círculo y el número de éstas que estaban sombreadas (una de tres partes sombreadas). En el rectángulo todos los estudiantes identificaron 4/8 como la fracción que representaba la parte sombreada. Tres de los estudiantes, con ayuda de la entrevistadora, también lograron identificar que la parte sombreada equivalía a 1/2. De ellos, sólo dos parecieron poder reconocer, con ayuda de la entrevistadora, que la parte sombreada también equivalía a 2/4.

En general, estos alumnos parecieron poder atribuir significados cuantitativos correctos a algunas fracciones, cuando se les asociaba con representaciones de uso común en la escuela.

Otra actividad consistió en identificar en cuál de tres pasteles se había ocupado más leche para su elaboración, cuando en uno se había usado un litro de leche, en otro 5/4 de litro y en un tercero 8/9 (Ver Figura 5). En esta actividad, tres de los cinco estudiantes de este nivel reconocieron al litro como la cantidad más grande. Los otros dos alumnos creyeron que 8/9 era la cantidad más grande. Así pues, ninguno de estos alumnos pareció haber desarrollado aún las nociones matemáticas necesarias para poder juzgar correctamente a una fracción como un número que expresa una cantidad que es mayor a un entero.

Una actividad más del Protocolo B consistió en evaluar la capacidad de diferentes vasos (de plástico, vidrio, cerámica, unicel, y cartón) en relación a cuántos podían ser llenados con la leche contenida en un cartón del producto. Para ello, se utilizó un cartón de leche vacío como el que se muestra en los dibujos de la Figura 2.

En primer lugar, se explicó a los estudiantes que el entrevistador (el segundo autor de este análisis) poseía unos vasos de plástico, todos del mismo tamaño, que tenían la característica de que un cartón de leche alcanzaba exactamente para servir dos de esos vasos (i.e., vasos de 1/2). Se les explicó que también había otros vasos para los cuales el cartón de leche alcanzaba para servir el siguiente número de vasos: de vidrio, tres vasos (1/3); de cerámica, cuatro vasos (1/4); de unicel, nueve vasos (1/9); de cartón, diez vasos (1/10).

Durante esta actividad se pidió a los alumnos que compararan la capacidad de los vasos. Por ejemplo, se les pidió que determinaran si los vasos de cerámica serían más grandes o más pequeños que los unicel (1/4 vs. 1/9). También se les pidió que determinaran la cantidad de leche que tendría el cartón si tuviera suficiente leche para servir cierta cantidad de vasos. Por ejemplo, se les pidió que determinaran si la cantidad de leche suficiente para servir cinco vasos de cartón sería más, menos o igual a la mitad del cartón. Bajo esta narrativa, cuatro de los cinco estudiantes pudieron determinar que los vasos de plástico serían más grandes que los de vidrio (1/2 > 1/3). Tres estudiantes determinaron que los vasos de vidrio serían mayores que los de cerámica (1/3 > 1/4), y que los de cerámica serían mayores a los de cartón (1/4 > 1/10). Cuatro de los estudiantes también pudieron reconocer que se utilizaría la mitad del cartón de leche para servir dos vasos de cerámica (2/4 = 1/2) y todos indicaron que también se necesitaría la mitad del cartón para servir cinco vasos de cartón (5/10 = 1/2). Finalmente, tres de estos estudiantes pudieron reconocer que se necesitaría menos de la mitad del cartón para servir 4 vasos de unicel (4/9 < 1/2).

En esta actividad se pudo observar que la mayoría de estos estudiantes era capaz de razonar de manera consistente con la racionalidad cuantitativa básica del denominador (entre más grande es el número de vasos que se pueden llenar con un litro de leche, menor es la capacidad de los mismos).

En general, estos estudiantes mostraron tener un conocimiento muy limitado del significado canónico de las fracciones. Sin embargo, manifestaron tener algunas intuiciones cuantitativas que podrían ser la base para apoyarlos a desarrollar una comprensión relativamente profunda del concepto de fracción.

Nivel 2

En el Nivel 2 se ubicó a un solo estudiante, que pareció tener menos dificultades que los estudiantes del Nivel 3 para entender las fracciones, expresadas de manera canónica, como una medida que expresa el valor de una magnitud. Este estudiante inicio con el Protocolo A. En la primera actividad, la del cartón de leche, este estudiante logró identificar 1/2 como más grande que 1/3, y 1/3 como más grande que 1/4. Al comparar 3/4 con 1/4 no logró identificar 3/4 como mayor a 1/4 e indicó que 2/3 era la mitad de 1/3. Aunque parecía entender qué significaba el numerador y el denominador de una fracción, su razonamiento no fue consistente. Por ello se consideró que las actividades del Protocolo A rebasaban sus habilidades matemáticas presentes y se continuó con el Protocolo B.

En la primera actividad del protocolo B, la de los Círculos y Rectángulos, el estudiante identificó a 1/2 y a 1/3 como las únicas fracciones que estaban representadas en los círculos. En el caso del rectángulo reconoció 4/8 y 1/2 como las fracciones equivalentes. Este estudiante parecía atribuirle significados cuantitativos correctos a algunas fracciones, cuando estaban asociadas a representaciones de uso común en la escuela.

En la actividad que implicaba evaluar la capacidad de diferentes vasos, el estudiante determinó correctamente que los vasos de plástico serían más grandes que los vidrio (1/2 > 1/3), que los vasos de vidrio serían mayores que los de cerámica (1/3 > 1/4), y que los de cerámica mayores a los de cartón (1/4 > 1/10). También reconoció que se utilizaría la mitad del cartón de leche para servir dos vasos de cerámica (2/4 = 1/2) y que se necesitaría la mitad del cartón para servir cinco vasos de cartón (5/10 = 1/2). Finalmente, reconoció que se necesitaría menos de la mitad del cartón para servir 4 vasos de unicel (4/9 < 1/2).

En general, el estudiante mostró tener un conocimiento del significado canónico de las fracciones ligeramente más amplio que el de los estudiantes ubicados en el Nivel 3. También pareció contar con algunas intuiciones cuantitativas que podrían ser la base para desarrollar una comprensión relativamente profunda del concepto de fracción. Sin embargo, su conocimiento de las fracciones parecía distar todavía del deseado para su nivel educativo.

CONCLUSIÓN

Del análisis de las entrevistas se desprende que los estudiantes ubicados en los dos niveles de desempeño más bajos parecían no contar, al concluir la primaria, con los conocimientos mínimos necesarios para involucrarse con los contenidos relacionados con el tema de fracción, prescritos en el plan de estudios de educación secundaria. Los conocimientos desarrollados por estos estudiantes tampoco parecen haber sido suficientes para permitirles participar competentemente en actividades que implican el concepto de fracción. Por ejemplo, a los alumnos ubicados en la los Niveles 2 y 3, parecería que no les sería trivial interpretar información como la siguiente: "el navegador *Safari* carga una página web en 1/42 del tiempo que se tarda el navegador *Explorer*".

Es importante aclarar que lo dicho en el párrafo anterior no implica que los estudiantes ubicados en los Niveles 2 y 3 fueran incapaces de acceder a los contenidos propios de la educación secundaria. Lo que nuestro análisis sugiere es que estos estudiantes necesitarían primero que se les apoyara a desarrollar cocimientos básicos del las fracciones, conocimientos que son consistentes con algunas nociones e intuiciones con que ya cuentan.

Los datos aquí reportados suponen retos importantes para el sistema educativo, tanto a nivel primaria como secundaria, respecto a la formación matemática del estudiantado. Por un lado, nuestros datos sugieren en la educación primaria habría que desarrollar estrategias que le permitan a muchos más estudiantes desarrollar nociones relativamente complejas del concepto de fracción. Por otro lado, en la educación secundaria sería necesario desarrollar estrategias para ayudarle a muchos estudiantes que llegan con rezagos importantes en su comprensión de las fracciones a que desarrollen las nociones que necesitan para acceder a los contenidos matemáticos propios de este nivel educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Backhoff, E.; Andrade, E.; Sánchez, A.; Peón, M., y Bouzas, A. (2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Cobb, P. (1986). "Clinical interviewing in the context of research programs", en G. Lappan y R. Even (Eds.), *Proceeding of the eighth annual meeting of the international group of the Psychology of Mathematics Education: Plenary speeches and symposium* (pp. 90-110). East Lansing: Michigan State University.

Lamon, Susan J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential context knowledge and instructional strategies for teachers,* 2 ed., Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Piaget, J. (1978). *La representación del mundo en el niño*. Madrid, España: Morata.

Secretaría de Educación Pública (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006.* México: SEP.

Pérez, L. (2008). *Las fracciones como facilitadoras o limitantes del aprendizaje matemático*, tesis de maestría en la Universidad Pedagógica Nacional. México, DF.

Steffe, L. P. (2004). "Construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions", *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 129-162.

Thompson, P. W. y Saldanha, L. A. (2003). "Fractions and multiplicative reasoning", en J. Kilpatrick; G. Martin y D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXO

Rosa e Irma hacen un pastel con los siguientes ingredientes:

Ingredientes	Rosa	Irma
Harina	$\frac{3}{4}$ de kilogramo	$\frac{2}{4}$ de kilogramo
Azúcar	$\frac{2}{3}$ de kilogramo	$\frac{4}{6}$ de kilogramo
Mantequilla	$\frac{4}{6}$ de kilogramo	$\frac{4}{3}$ de kilogramo
Huevo	$\frac{6}{3}$ de kilogramo	$\frac{3}{6}$ de kilogramo

¿De cuál ingrediente ocuparon la misma cantidad?

A. Azúcar.*
B. Harina.
C. Mantequilla.
D. Huevo.

* RESPUESTA CORRECTA

Figura 1. Reactivo muestra de la evaluación de la identificación de fracciones comunes equivalentes[3].

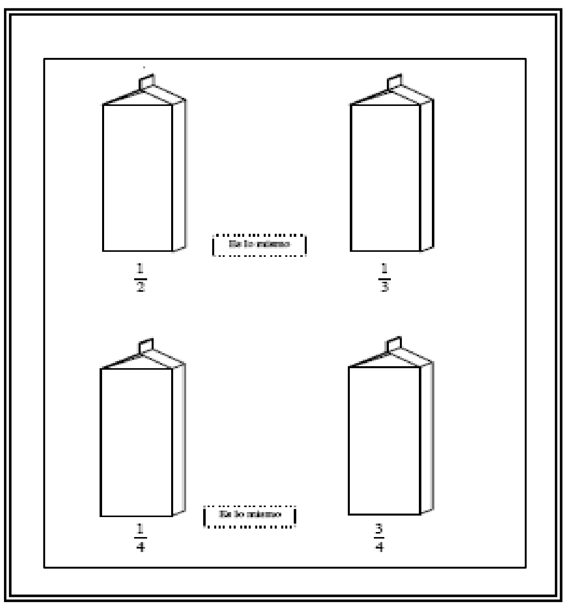

Figura 2. Ejemplos de las situaciones de comparacion (Protocolo A)

[3] Recuperado el 13 de enero de 2008 del Explorador EXCALE: http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraDificultad.php

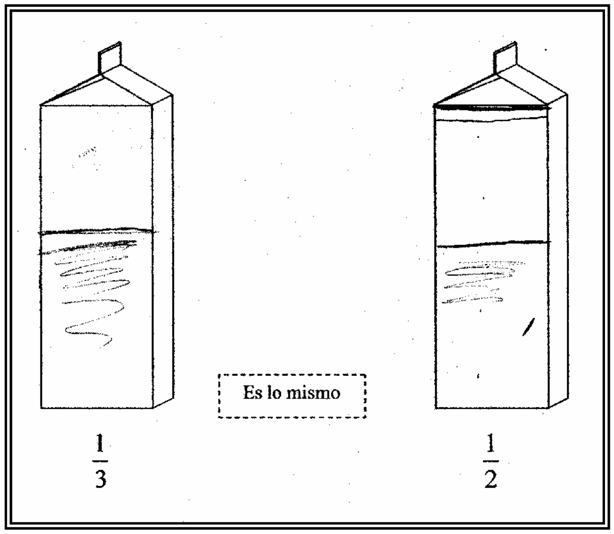

Figura 3a. Comparación del nivel de leche cuando el cartón contiene 1/2 y 1/3.

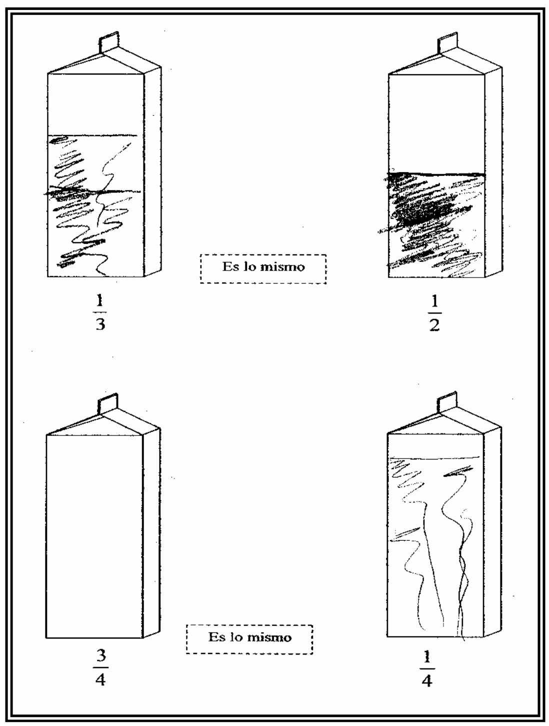

Figura 3b. Comparación del nivel de leche cuando el cartón contiene 1/3, 1/2 y 1/4.

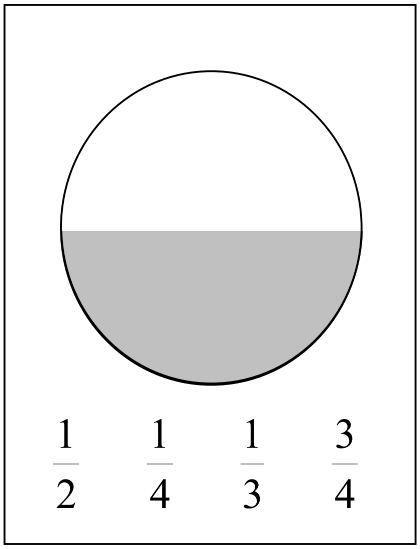

Figura 4a. Identificacion de 1/2 expresado de manera convencional.

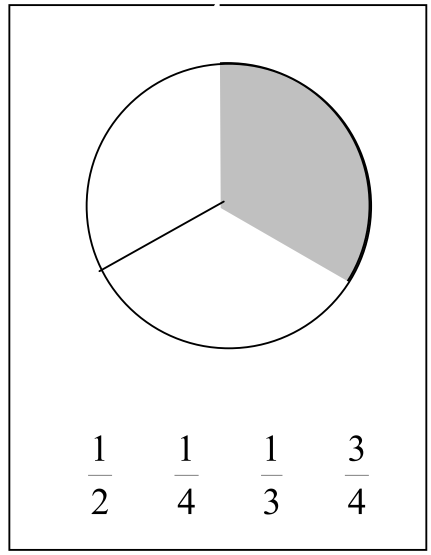

Figura 4b. Identificacion de 1/3 expresado de manera convencional.

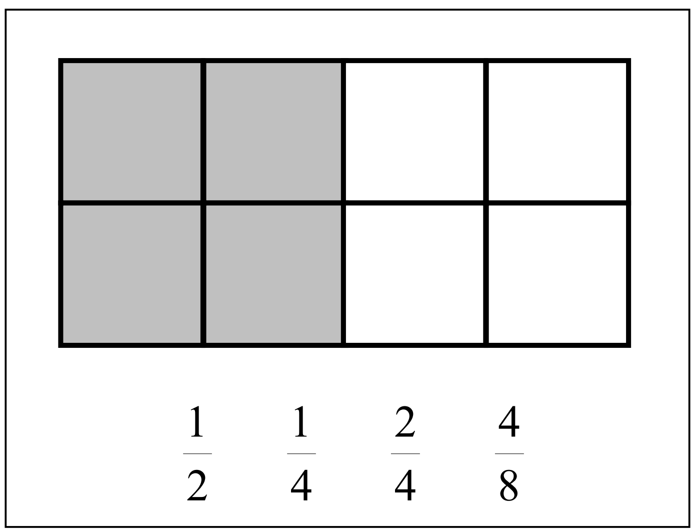

Figura 4c. Identificación de 4/8, 1/2 y 2/4 expresados de manera convencional.

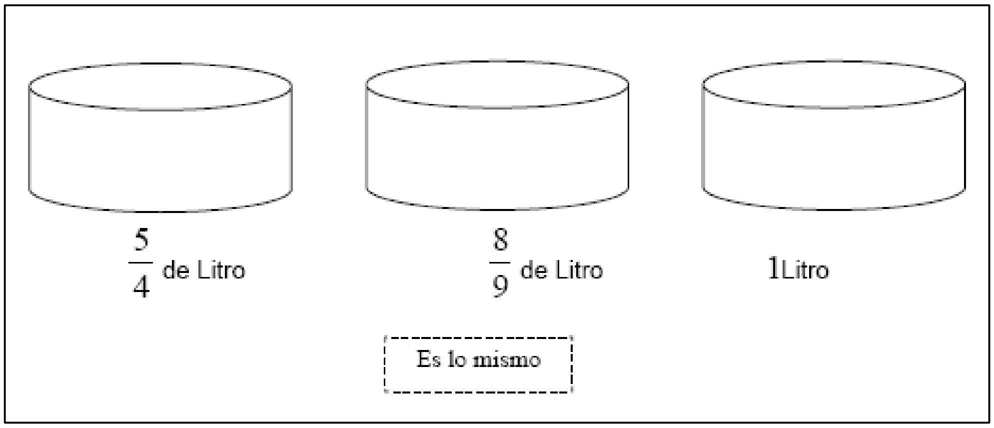

Figura 5. Comparación de fracciones mayores a 1 (5/4) representadas de manera convencional.