ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EMPLEADAS POR ALUMNOS DE SEXTO DE PRIMARIA

MARISOL SILVA LAYA / ADRIANA RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ/ OLGA SANTILLÁN GONZÁLEZ

RESUMEN:
Se presentan los resultados preliminares de la segunda fase de la investigación evaluativa del Método de Matemáticas Constructivas (MMC) del Centro de Investigación de Modelos Educativos (CIME). El propósito de la investigación fue profundizar en el conocimiento de las estrategias empleadas por los alumnos para la resolución de problemas matemáticos en evaluaciones tipo ENLACE, así como detectar errores y dificultades en la resolución de los mismos. La investigación se desarrollo en nueve escuelas privadas de la Zona Metropolitana del Distrito Federal, que trabajan con el CIME. Se entrevisto a 57 alumnos de 6° de primaria sobre el proceso de resolución empleado en cinco problemas, tomando como diseño de análisis el modelo de heurísticas de Polya y de Shoenfeld, considerando las siguientes categorías: conocimientos previos, comprensión del problema, concepción del plan, ejecución del plan (heurísticas) y visión retrospectiva. Los resultados confirman la importancia que tienen los conocimientos previos, así como la comprensión del problema y la concepción del plan para el diseño de estrategias. Se detectó que la principal dificultad se encuentra en el área de geometría.
PALABRAS CLAVE: Matemáticas, estrategias, resolución, problemas, constructivismo.

INTRODUCCIÓN

Este texto presenta los resultados preliminares de la segunda fase de una investigación evaluativa del "Modelo de Matemáticas Constructivas" (MMC), desarrollado por el Centro de Investigaciones de Modelos Educativos (CIME). El MMC es una propuesta pedagógica basada en la teoría constructivista, orientada a lograr aprendizajes significativos que faciliten la adquisición de conocimientos para la vida y favorezcan el desarrollo integral de los estudiantes. En la actualidad CIME trabaja con más de 300 instituciones educativas en 28 estados de la República Mexicana.

En la primera fase de la investigación valoramos la puesta en práctica del MMC; mientras que en ésta analizamos las estrategias utilizadas por los alumnos de 6° para resolver problemas matemáticos en una evaluación tipo ENLACE. Esto con el fin de detectar fortalezas y dificultades en la resolución de problemas y extraer recomendaciones pedagógicas para hacer frente al problema que enfrentamos en la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

Los resultados que arrojan diversas evaluaciones –EXCALE, ENLACE, PISA– dan cuenta de las profundas carencias de una gran cantidad de niños mexicanos en torno a competencias matemáticas; que no sólo son fundamentales para un buen desempeño escolar; sino que resultan básicas para un desempeño adecuado en otros ámbitos de la vida. Estos resultados exigen tomar medidas para atender las necesidades educativas de los alumnos. El mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas es un problema central para el sistema educativo mexicano y por ello la búsqueda de alternativas dirigidas a sacar adelante esta tarea cobra relevancia. El presente proyecto pretende responder a esa necesidad.

MARCO CONCEPTUAL

La investigación se sustenta en dos marcos conceptuales. Por un lado, la teoría constructivista del aprendizaje y su aplicación al campo de las matemáticas. Por otro, algunas aproximaciones teóricas y metodológicas al análisis de las estrategias de resolución de problemas matemáticos.

El fundamento epistemológico del constructivismo sostiene que el conocimiento se construye activamente por el sujeto y no se ve como algo que existe fuera de sus cuerpos, a quienes se les puede transmitir el cúmulo de saberes de manera automática (Novack, 1998; Larios, 2000; Carretero, 1997). Por el contrario, el constructivismo intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conceptos y cómo sus estructuras conceptuales le llevan a convertirse en las gafas perceptivas que guían sus aprendizajes (Novack, 1988, p.219).

Aunque existen distintas corrientes dentro de este paradigma, existe coincidencia en el postulado central que destaca la importancia de los conocimientos previos como sustrato para el nuevo conocimiento y, por tanto, para el aprendizaje. Es decir, el sujeto construye los conocimientos en función de sus experiencias previas, creencias o ideas que en su conjunto conforman lo que Novack denomina "estructuras conceptuales". Pero estas estructuras también se reorganizan con lo nuevos conocimientos.

Larios (2000), retomando los conceptos de adaptación y acomodación de Piaget, concluye que los nuevos conocimientos son asimilados de acuerdo con lo que ya existe en el individuo y se acomodan en las estructuras de éste, no solo modificándose los conocimientos –adaptación– sino también las propias estructuras –acomodación.

Los postulados constructivistas son aplicables a cualquier área del saber y las matemáticas es una de ellas. Kilpatrcick, Gómez y Rico (1995, pp. 74-75, citados en Larios, 2000) precisan que:

- Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- La estructuras cognitivas están en desarrollo continuo y la actividad con propósito induce la transformación en las estructuras existentes.

En suma, la presente investigación se suscribe al principio de que el individuo que aprende matemáticas debe construir los conceptos a través de la interacción con los objetos y otros sujetos (Larios, 2000). Esta la actividad no es únicamente física, sino en gran medida mental e implica construir y reconstruir esquemas y modelos mentales. Castillo sintetiza estas ideas al afirmar que "aprender es un proceso individual y colectivo de diseño y construcción/reconstrucción de esquemas mentales previos con el resultado de procesos de reflexión e interpretación" (2008, p. 176).

En lo que toca a las estrategias de resolución de problemas matemáticos, retomamos el modelo de heurísticas de Polya (1965), el cual contempla cuatro fases: *a) Comprender* el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones?; b) *Concebir un plan*: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos?; c) *Ejecución del plan*: comprobar cada uno de los pasos; d) *Visión retrospectiva*: verificar el resultado. Adicionalmente, incorporamos el análisis de los *recursos* de los estudiantes para la resolución (Schoenfeld, 1985). Esta categoría se operacionalizó como conocimientos previos, debido a la importancia que revisten para la visión constructivista del aprendizaje.

Dado que una de las principales críticas al esquema formulado por Polya es que es muy general, retomamos la propuesta de Campistrous y Rizo (1999) para clasificar las heurísticas de los alumnos en reflexivas e irreflexivas y también los aportes de Arteaga y Guzmán (2005) para explorar la riqueza de las respuestas de los alumnos. El marco analítico se estructuró con las categorías siguientes:

1) Recursos (conocimientos previos)
2) Comprensión del problema
3) Concebir un plan
4) Ejecución del plan (heurísticas)
5) Visión retrospectiva

METODOLOGÍA

La investigación tuvo un alcance descriptivo, para conocer detalladamente las estrategias empleadas por los alumnos. Se utilizó un enfoque mixto –cuantitativo/cualitativo. Se aplicó una prueba y se analizó mediante estadística descriptiva. Los problemas abordados se resumen a continuación:

Cuadro 1. Problemas de la prueba

Tema	Problema	Nivel de dificultad	Tipo de prueba
Números fraccionarios	**A**	Alto	Enlace
Variación proporcional	**B**	Alto	Enlace
Áreas y cuerpos geométricos	**C**	Alto	Enlace
Tratamiento de información	**D**	Medio	Enlace
Perímetros, áreas y figuras geométricas	**E**	Alto	Olimpiadas

A partir de los resultados de la prueba, se seccionó una muestra de 57 alumnos –con alto y bajo rendimiento– a quienes se realizaron entrevistas estructuradas para profundizar en las estrategias que emplearon. Partimos de grandes categorías (Polya y Shoenfeld), para descubrir elementos característicos del marco conceptual y metodológico de los alumnos. Los resultados se cuanficaron para facilitar su comunicación.

RESULTADOS

La proporción de estudiantes que contestó correctamente cada uno de los problemas osciló entre 41 y 68%. El mayor porcentaje de aciertos se presentó en *tratamiento de la información* (68.4%) y *números fraccionarios* (56.4%). Los temas donde hubo mayor reprobación fueron *geometría* (54.5 y 58.9%) y *variación proporcional* (50.9%).

Cuadro 2. % de estudiantes que respondieron correctamente

Problema	% de respuestas correctas	% de respuestas incorrectas
A	56.4	43.6
B	49.1	50.9
C	45.5	54.5
D	68.4	31.6
E	41.1	58.9

Conocimientos previos

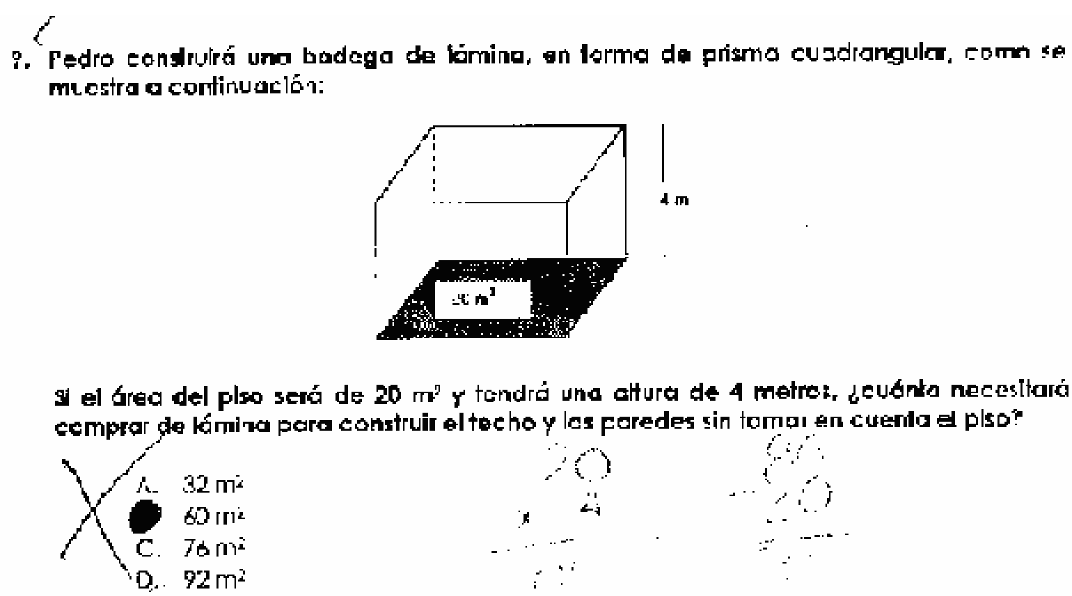
Altas proporciones de estudiantes no contaban con conocimientos previos suficientes y exhiben errores conceptuales en torno a ejes temáticos claves de las matemáticas, p.e. geometría (5 de cada 10 alumnos).

Cuadro 3. %de alumnos de acuerdo con sus conocimientos previos

Problema	Conocimientos suficientes	Conocimientos insuficientes
A	72.7	27.3
B	52.7	47.3
C	46.3	53.7
D	100.0	0.0
E	50.0	50.0

Los problemas de geometría –*áreas y cuerpos geométricos* y *perímetros, áreas y figuras geométricas*– concentraron las mayores proporciones de alumnos con conocimientos previos insuficientes –53.7 y 50%, respectivamente. Su resolución requería el manejar conceptos como perímetro, área total, raíz cuadrada y reconocimiento de las características de un prisma cuadrangular. Muchos alumnos confundieron el término de prisma cuadrangular y sus características con las de un cubo.

Esquema 1. Conocimientos previos insuficientes.



7. Pedro construirá una bodega de lámina, en forma de prisma cuadrangular, como se muestra a continuación:

4 m

20 m²

Si el área del piso será de 20 m² y tendrá una altura de 4 metros, ¿cuánta necesitará comprar de lámina para construir el techo y las paredes sin tomar en cuenta el piso?

A. 32 m²
B. 60 m²
C. 76 m²
D. 92 m²

En el problema de *tratamiento de la información* todos los estudiantes mostraron conocimientos previos suficientes. Éste fue el único con un nivel de dificultad medio y no requería tanto de conocimientos declarativos como de procedimentales, específicamente demandaba habilidad de análisis y de relación de datos.

Esquema 2. Ejemplo de análisis y relación de datos

10. A la población joven de cierto estado, que representa el 56 %, se le aplicó una encuesta sobre las actividades que realizan en su tiempo libre, de la cual se desprendió esta tabla:

1200
2220
3420

Actividades	Frecuencia de preferencias en miles	Porcentaje de jóvenes respecto al total de la población
Ver TV o cine	2220	18.5 %
Leer	1200	10 %
Escuchar música	1800	15 %
Hacer deporte	1500	12.5 %

1800
1500
3300

¿Cuál de las siguientes opciones presenta información verdadera con respecto a la tabla anterior?

A) La mayoría de los jóvenes prefiere leer o hacer deporte
B) La actividad que prefieren los jóvenes en mayor medida es escuchar música
C) Los jóvenes que prefieren leer y escuchar música son más que los que prefieren ver TV o cine y hacer deporte
D) Los jóvenes que prefieren leer y ver TV o cine son aproximadamente los mismos que prefieren escuchar música y hacer deporte

Aproximadamente 6 de cada 10 alumnos que exhibieron conocimientos previos suficientes contestaron de manera correcta todos los problemas. En contraste, la mayoría (entre 66.7 y 89.7%) de estudiantes con conocimientos previos insuficientes contestaron incorrectamente, siendo más notorio en los problemas de geometría.

Comprensión del problema

La comprensión de los problemas –entender la pregunta, datos y condiciones– varía de acuerdo con el tema abordado y su nivel de dificultad. En aquéllos que requerían el desemepeño de competencias básicas, como la comprensión lectora, los niños mostraron un mayor entendimiento que en los que demandaban conocimientos declarativos específicos, como el concepto de perímetro o área.

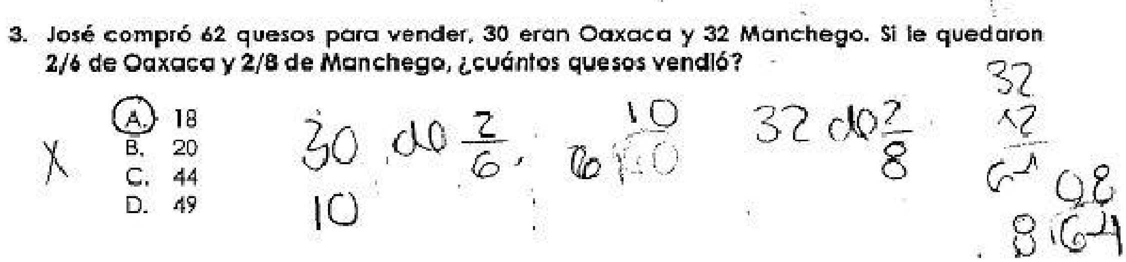
La mayoría de los problemas fueron comprendidos por menos de la mitad de los alumnos, con excepción del referido a *tratamiento de la información* (80.7%), que resultó el más sencillo. El caso más preocupante fue el de *perímetros, áreas y figuras geométricas*, dónde sólo 3 de cada 10 pudieron explicarlo correctamente, manejaron sus conceptos e identificaron las operaciones necesarias.

Cuadro 4. % de alumnos según comprensión del problema

Problema	Comprende	Comprende parcialmente	No comprende
A	49.1	40.0	10.9
B	45.5	38.2	16.4
C	43.6	38.2	18.2
D	80.7	10.5	8.8
E	30.4	21.4	48.2

Los alumnos que comprendieron los problemas tuvieron un índice de respuestas correctas que oscila entre 75 y 92%; mientras que en el caso contrario prevalecen los errores –entre 80% y la totalidad. También predominan los errores cuando la comprensión es parcial –no identificar los conceptos y datos, o las operaciones o se confunde la pregunta. Las confusiones en las preguntas fueron recurrentes. En el esquema siguiente se muestra un ejemplo de ello:

Esquema 3. Ejemplo de comprensión parcial del problema. – Confusión en comprensión lectora -



Concepción del plan

La gran mayoría de los alumnos afirma haber establecido un plan. De ellos, altas proporciones –entre 81.8% y la totalidad– pudieron recrear el procedimiento utilizado en los cinco problemas; sin embargo, no daban cuenta de un plan en estricto sentido. Una menor proporción logró justificar para qué siguió dicho procedimiento –entre 48.2 y 70.9%; es decir, explicar las relaciones percibidas entre los diferentes elementos que le permitieron encontrar la idea de la solución y trazar el plan (Valle, 2007). Los problemas de geometría concentraron en mayor medida la carencia de explicaciones.

Cuadro 5. % de alumnos según su concepción del plan

Problema	Establece un plan	Recrea el procedimiento		Justifica sus acciones	
		Sí	No	Sí	No
A	92.7	81.8	12.7	70.9	21.8
B	92.7	90.9	5.5	56.4	38.2
C	96.4	92.7	7.3	56.4	40.0
D	100	100.0	0.0	91.2	8.8
E	92.9	83.9	14.3	48.2	42.9

Los estudiantes que pudieron justificar el sentido de sus acciones tienen mayor probabilidad de solucionar correctamente el problema. Cerca de 7 de cada 10 estudiantes que justificaron sus planes contestaron acertadamente las preguntas del examen.

Ejecución del plan (heurísticas)

Clasificamos las estrategias empleadas por los estudiantes en reflexivas e irreflexivas. Las primeras requieren de un proceso de análisis previo, que permite asociar la vía de solución a factores estructurales. Mientras que las irreflexivas responden a un proceder prácticamente automatizado, sin que pase por un análisis (Campistrous y Rizo, 1999).

Los estudiantes utilizaron estrategias reflexivas para resolver los problemas que le implicaban menor dificultad –*tratamiento de información* (96.5%), *números fraccionarios* (73.7%) y *variación proporcional* (71.9%). Por el contrario, recurrieron a estrategias irreflexivas en los problemas más difíciles –*perímetros, áreas y figuras geométricos* (59.6%), *áreas y cuerpos geométricos* y *variación proporcional* (54.4% cada uno).

Cuadro 6. % de alumnos por estrategia utilizada

Problema	Estrategias reflexivas	Estrategias irreflexivas
A	73.7	38.6
B	71.9	54.4
C	57.9	54.4
D	96.5	15.8
E	52.6	59.6
Promedio	**70.2**	**45.8**

Nota: No son categorías excluyentes.

Estrategias reflexivas

La estrategia más utilizada en todos lo problemas fue seleccionar la operación cuyo significado era el apropiado para el texto. Su incidencia fue mayor en *números fraccionarios* y *tratamiento de la información* (93%). La segunda en frecuencia fue ordenar los datos y tenerlos presentes para la solución y fue recurrente en *números fraccionarios* y *variación proporcional*. Apoyarse en el diseño de un dibujo o esquema fue una estrategia privilegiada para resolver uno de los problemas de *geometría* y el de *variación proporcional*. Las heurísticas menos empleadas fueron el tanteo y el razonamiento directo; sin embargo, resultaron de utilidad en los casos de *variación proporcional* y *perímetros, áreas y figuras geométricas*.

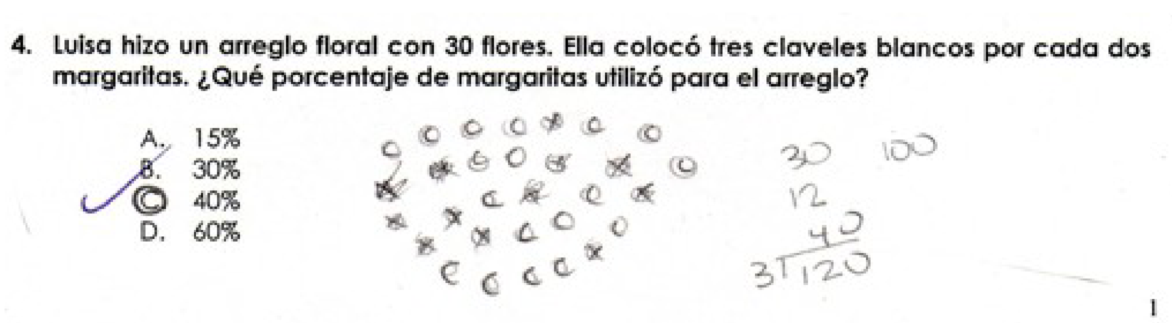
Cuadro 7. % de alumnos según estrategias reflexivas utilizadas

Problema	% de alumnos que procedieron reflexiva-mente	Selección de operación apropiada	Tanteo	Dibujo / esquema	Razona-miento directo	Ordena los datos y los tiene presentes	Diversos procedimientos
A	73.7	92.9	0.0	4.8	4.8	64.3	19.0
B	71.9	48.8	26.8	41.5	14.6	41.5	31.7
C	57.9	81.8	3.0	18.2	3.0	36.4	15.2
D	96.5	92.7	1.8	5.5	1.8	14.5	3.6
E	52.6	40.0	13.3	53.3	16.7	20.0	33.3

Proporciones significativas de alumnos emplearon diversos procedimientos para llegar al resultado, ello fue notorio en los problemas de *geometría*, que revestían un alto grado de dificultad –alrededor de la tercera parte. Cuando un procedimiento no conducía a la respuesta, los niños ensayaron distintas alternativas, lo que da cuenta de su motivación al logro. Esto cobra relevancia, ya que 7 de cada 10 llegaron al resultado correcto.

En otros casos un alumno utilizó dos o más procedimientos para la solución. El siguiente esquema ilustra la solución al problema de *variación proporcional*. El alumno primero se apoyó en dibujos, para encontrar el número de margaritas, y posteriormente, seleccionó la operación adecuada.

Esquema 4. Utilización de diversas estrategias reflexivas al mismo tiempo



Más del 60% de los estudiantes que utilizó estrategias reflexivas obtuvo resultados acertados. En el tema de *variación proporcional* 9 de cada 10 que seleccionaron la operación adecuada –cálculo de porcentaje- tuvieron un acierto.

Estrategias irreflexivas

El empleo de estrategias irreflexivas depende de la naturaleza de los problemas y, como es de suponer, la solución correcta depende del azar. Reiteradamente, altas proporciones –entre 50% y la totalidad– de estudiantes que recurrieron a este tipo de estrategias contestaron de manera incorrecta.

La estrategia irreflexiva más utilizada fue la de adivinar la operación o la realización de ésta de mecánicamente y fue recurrente en los problemas de *geometría* (61.8 y 74.2%). Otra estrategia frecuente fue la de contestar sin hacer operaciones y tuvo mayor presencia en *variación proporcional* (22.6%). Seleccionar la opción más cercana al resultado obtenido y buscar palabras claves, pero sin comprender el significado del texto, fueron estrategias poco empleadas por los estudiantes y cuando ocurrió fue en *geometría*.

Cuadro 8. % de alumnos según estrategias irreflexivas utilizadas

Problema	% de alumnos que procedieron irreflexiva-mente	Adivina la operación y/o utiliza operaciones mecánicament e	Contesta sin hacer operación	Busca palabras clave sin comprender el significado del texto	Selecciona la opción más cercana al resultado obtenido
A	38.6	59.1	13.6	0.0	4.5
B	54.4	54.8	22.6	9.7	9.7
C	54.4	74.2	19.4	0.0	12.9
D	15.8	0.0	11.1	11.1	0.0
E	59.6	61.8	17.6	14.7	5.9

VERIFICACIÓN DE RESULTADOS

Poco menos de la mitad de los alumnos verificó sus respuestas. La proporción de estudiantes que realizó una visión retrospectiva fue disminuyendo a medida que avanzando en la solución de la prueba. Los alumnos que verificaron sus respuestas, en general, obtuvieron un porcentaje más alto de respuestas correctas que quienes no lo hicieron. La importancia de este paso se confirmó durante las entrevistas, donde muchos alumnos al revisar sus pruebas, detectaron errores que pasaron por alto.

CONCLUSIONES

- El índice de respuestas correctas debe mejorar. La mayor dificultad se presenta en geometría, dato que coincide con los resultados de EXCALE y ENLACE, lo que indica que es un área urgente de atender.
- Los conocimientos previos son fundamentales para el éxito en la resolución de problemas, especialmente en aquellos temas que contienen conceptos específicos, en cuyo caso los errores conceptuales obstaculizan la resolución. La simple memorización de fórmulas no es suficiente, se requiere la comprensión y aplicación.
- La comprensión del problema es fundamental. Los resultados demuestran que cuando los niños no comprenden tienden a obtener resultados equivocados. Poner atención en la pregunta debe reforzarse.
- Los alumnos tienen dificultades para trazar un plan y explicarlo correctamente. La didáctica de las matemáticas debiera poner énfasis en este elemento y su relación con los conocimientos previos y la comprensión del problema como parte esencial para diseñar un plan.
- El empleo de estrategias reflexivas como *ordenar los datos y tenerlos presentes* y *apoyarse en esquemas y dibujos* son heurísticas que fortalecen la comprensión del problema y conducen a respuestas correctas en altas proporciones.

- La estrategia irreflexiva más frecuente fue tratar adivinar la operación correcta, lo que corrobora que persiste la creencia sobre las matemáticas como algo desligado de la realidad, en donde sólo hay que aplicar algoritmos y fórmulas irreflexivamente.
- Se confirmó la importancia de la verificación de resultados después de la prueba. Muchos alumnos al explicar nuevamente el procedimiento que habían realizado, detectaron sus propios errores. Lo cual desde el paradigma constructivista devuelve a las evaluaciones su verdadero sentido dentro un proceso cíclico y no como cúspide de un proceso.
- Falta mayor exploración en los errores que cometen los alumnos que comprenden el problema y poseen conocimientos previos.

REFERENCIAS

Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). "Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 2, núm. 3, pp. 31-45.

Carretero, M. (1997). *Constructivismo y educación*. México: Progreso.

Castillo, S. (2000). "Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC´s en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), pp. 171-194.

Driver, R. (1986). "Psicología cognoscitiva y esquemas conceptúales de los alumnos", *Enseñanza de las Ciencias*, 4(1), 3-15.

Larios, V. (2000). "Constructivismo en tres patadas", *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, año 1, núm. 1, pp. 2-8

Novack, J. (1988). "Constructivismo humano un consenso emergente", *Enseñanza de las Ciencias*, 6 (3), pp. 213-223.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Valle, E., *et al.* (2007), "Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 9 (2). En <http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html>.