La Generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: Un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo

Cristianne Butto Zarzar / Teresa Rivera Cortés
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco

Resumen: Varios autores han investigado el pensamiento algebraico, por ejemplo: Aritmética generalizada (Mason, 1985), Dificultades y errores de los alumnos en los procesos de generalización (Alonso 1996), la identificación de patrones en diferentes contextos para el aprendizaje (Castro, Rico y Castro), Patrones con procedimientos recurrentes y la interacción entre iguales (Durán Ponce 1999), entre otros. El marco teórico se fundamentó en la propuesta de Mason (1985) y propone cuatro etapas para acceder al pensamiento algebraico vía a los procesos de generalización. El autor menciona que, para acceder al álgebra se deben relacionar contenidos aritméticos y geométricos en la construcción de un pensamiento algebraico. La metodología fue cualitativa. Población: seis estudiantes entre 11 y 12 años de edad, que cursan el primer grado de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal. Etapas del estudio: aplicación de un cuestionario diagnóstico sobre los procesos de generalización, seguido de una entrevista clínica individual. Los resultados revelan que los alumnos identifican secuencias geométricas, perciben el patrón y la expresan de forma algebraica y pre-algebraica.

Palabras clave: **Pensamiento algebraico, procesos de generalización, educación básica.**

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas escolares representa una dificultad para la mayoría de los estudiantes, y esto se muestra en los índices de reprobación que arrojan las diferentes pruebas nacionales e internacionales, como la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), y los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE), que evalúan logros, conocimientos y habilidades en matemáticas, establecidas por el Sistema Educativo Nacional (SEN), y el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), así como por el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (*Programme for International Student Assesment (PISA),* promovido por la Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). En las primeras pruebas mencionadas, se puede observar que hay una relación entre los contenidos temáticos de la Secretaria de Educación Pública (SEP), con el plan y programas de estudios, mientras que en PISA no se apega a dichos planes.

En lo que respecta al examen EXCALE, los procesos de generalización se trabajan en 3º grado de secundaria, el contenido matemático de *“Resolución de problema que implica plantear una ecuación”* el porcentaje de acierto es de 14%; esto demuestra que en los dos grados anteriores (1º y 2º grado), el aprendizaje del álgebra continua siendo una dificultad para los estudiantes.

En algunos casos, esta dificultad se debe en parte a que esa transición se realiza de manera lineal y no genera en los estudiantes una conceptualización matemática. La investigación en didáctica del álgebra, muestra resultados que acceder al álgebra vía los procesos de generalización puede ser una ruta viable para acceder al pensamiento algebraico. La principal crítica que se hace a este acercamiento es que introduce al niño a un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, ignorando que viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos. Los estudios de Filloy 1991, y 1993 y Filloy y Rojano 1991 citado en Butto y Rojano 2010, sobre la transición de la aritmética al álgebra, dentro de las investigaciones sobre la interacción del lenguaje algebraico con otros lenguajes, evidencian problemas de traducción del lenguaje natural al álgebra y vice-versa. Los autores presentan y analizan tendencias cognitivas en el aprendizaje de conceptos más abstractos y observan las tensiones entre los significados atribuidos a los conceptos algebraicos elementales en construcción y los significados provenientes de los campos conceptuales aritmético y del pre-algebra, sobre los cuáles se construye el nuevo conocimiento, el algebraico. De dicha tensión surge la necesidad de dotar de un nuevo sentido a las operaciones y conceptos en álgebra, que a su vez dotará de nuevos significados a las expresiones algebraicas representadas por los mismos signos (de la aritmética) o versiones más elaboradas de ellos.

A partir de estas dificultades se han llevado a cabo diversos estudios; por ejemplo, Mason (1995), propone cuatro etapas para la enseñanza del álgebra; Castro, Rico y Castro (1995) mencionan que la identificación de patrones en diferentes contextos es vital para la enseñanza de las matemáticas. Alonso (1996) citado por Butto (2005), argumenta que una de las dificultades de los estudiantes con los procesos de generalización es encontrar términos generales y llegar a una expresión simbólica; por ello se debe desarrollar o guiar a los estudiantes a visualizar las semejanzas o similitudes en los problemas planteados. Durán Ponce (1999), plantea que el trabajo con patrones se puede lograr con procedimientos recurrentes y la interacción entre iguales. Para Reggiani (1994), la generalización es la base para el desarrollo de un pensamiento algebraico.

En este estudio consideramos, el acercamiento al álgebra vía los procesos de generalización, resaltando la capacidad de desarrollar en los estudiantes la posibilidad de percibir un patrón, así como la capacidad para comunicarlo y expresarlo en un lenguaje algebraico.

Antecedentes del estudio: Procesos de Generalización

La comunidad internacional de didáctica del álgebra reconoce cuatro acercamientos sobre el pensamiento algebraico: La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes en relación numérica, la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, el estudio de situaciones funcionales y la solución de problemas.

Mason (1985) propone que la generalización es una vía para acceder al pensamiento algebraico, argumenta que el aprendizaje del álgebra se relaciona con la aritmética generalizada, posibilidades o restricciones, expresión de la generalidad, reordenamiento y manipulación. El autor plantea cuatro fases para llegar a la generalización:

- *Percibir un patrón.*
- *Expresar un patrón.*
- *Registrar un patrón.*
- *Prueba de validez de las fórmulas.*

Al estimular la habilidad de expresar generalidades, los estudiantes aprenden a ver lo general en lo particular y viceversa. Según este autor, la generalidad es fundamental para acceder al álgebra de una manera significativa y construir su conocimiento.

Para Castro, Rico y Castro (1995), citados en Butto (2005), toda semejanza conlleva a una regularidad o patrón, implica una situación repetitiva, logrando un resultado, de modo que se pueda predecir; considerando las diferentes teorías en matemáticas, éstas nos ayudan a percibir la relación entre patrones y sus estructuras; a identificar los patrones y semejanzas, en relación con las matemáticas; nos abre la puerta al álgebra, a un lenguaje algebraico y a un pensamiento abstracto, es decir, la base para comprender y apropiarse los temas posteriores, el identificar de manera clara los patrones en matemáticas.

Por otro lado la Secretaría de Educación Pública (SEP-México), por medio de los Planes y Programas de Estudios de Educación Básica, y la Reforma de la Educación Secundaria (RES 2006), determinan los contenidos matemáticos que son vistos en la asignatura de matemáticas implementa tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma espacio y medida y manejo de la información. Siendo el primer eje temático el que trata los procesos de generalización inicialmente y en los siguientes grados se retoman de manera significativa. El objetivo de dicha asignatura es que los estudiantes desarrollen habilidades y un pensamiento matemático, que les permita enfrentarse a diferentes problemáticas de su entorno social y educativo, originando la reflexión y la comprensión.

Objetivo del Estudio

Explorar el pensamiento algebraico de los estudiantes de 1º grado de secundaria vía los procesos de generalización.

Marco Teórico

El marco teórico de esta trabajo, se fundamentó en la propuesta de Mason (1985), y propone cuatro etapas para llegar a la generalidad, donde el percibir un patrón, expresar un patrón, registrar un patrón y llegar a la prueba de válidez de la fórmula.

Consideraciones metodológicas

El de tipo de estudio fue descriptivo y explicativo de corte cualitativo. La población con la que se trabajó fueron seis estudiantes de primer grado de secundaria con edades entre 11 y 12 años de edad, en una escuela pública de la ciudad de México y sin previo conocimiento del álgebra.

Montaje experimental

El estudio consta de dos etapas: cuestionario inicial sobre procesos de generalización y entrevista clínica individual.

Descripción de la primera etapa del estudio

a) Cuestionario inicial

Esta etapa consta de un cuestionario inicial de procesos de generalización, cuyo objetivo fue identificar posibles dificultades y competencias matemáticas en los dominios que son explorados, como se muestra en la tabla Nº 1.

Tabla Nº 1 Descripción del Cuestionario Inicial de los Procesos de Generalización

Nº de la Pregunta	Contenido Matemático	Solicitud de la Pregunta
1-4	Secuencia aritmética creciente y decreciente	Se pide completar diferentes secuencias, crecientes y decrecientes
5-10	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1}+1$ y la secuencia geométrica $G_n= 2\ G_{n-1}$	Los estudiantes tienen que visualizar la secuencia creciente de las figuras.
11-14	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1}+1$ y la secuencia geométrica $G_n= 2\ G_{n-1}$	Se presenta una secuencia y los estudiantes tienen que dibujar las figuras faltantes de las siguientes secuencias.
15-17	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1}+1$ y la secuencia geométrica $G_n= 2\ G_{n-1}$	Se presenta una secuencia y los estudiantes tienen que dibujar las figuras faltantes de las siguientes secuencias.

Descripción de la segunda etapa del estudio

b) Entrevista clínica individual abierta

Una conversación abierta con el estudiante sobre las preguntas del cuestionario de procesos de generalización, teniendo como finalidad que exprese de forma verbal cómo resolvió las situaciones planteadas, se explora con libertad las respuestas algebraicas o pre-algebraicas que desarrollaron, con el propósito de que expresen sus propios conocimientos

Análisis de los datos

El análisis de los datos fue realizado en tres etapas: Primera etapa: Niveles de Logros (Alto, medio e inicial). Segunda etapa: estrategias de resolución: aditiva, multiplicativa intermedia y multiplicativa. Tercera etapa: análisis clínico de las entrevistas individuales.

A continuación se describen los niveles de logro.

1. Niveles de Logro

Nivel de logro alto: se consideran las respuestas correctas a los ítems explorados en el cuestionario inicial; y corresponden a un nivel alto de conceptualización matemática. El estudiante demuestra la comprensión de las ideas de sucesiones aritméticas y geométricas, sucesiones aritméticas decrecientes y crecientes.

Nivel de logro intermedio: se consideran las respuestas de tipo aditivo (suma o resta) el estudiante presenta un pensamiento en transición de las estructuras aditivas a las multiplicativas.

El nivel de logro bajo: se consideran las respuestas que expresan un pensamiento aditivo, utiliza respuesta de tipo aditivo y evidencia comprensión de los temas explorados en el cuestionario inicial.

A continuación se describen las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes.

2. Estrategias de resolución de problemas

Estrategia Aditiva: esta categoría se caracteriza porque los estudiantes resuelven el problema mediante una suma o resta, no logran visualizar las semejanzas y no identifican el patrón. Se limitan a contar de manera progresiva el incremento de la figura sin visualizar la figura, como se muestra en la figura Nº 1.

Figura No.1 Ejemplo de estrategia aditiva

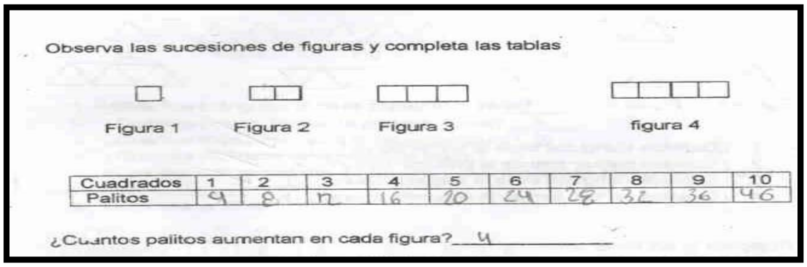

Observa las sucesiones de figuras y completa las tablas

Figura 1 Figura 2 Figura 3 figura 4

Cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Palitos	4	8	12	16	20	24	28	32	36	46

¿Cuantos palitos aumentan en cada figura? 4

Estrategia multiplicativa intermedia: se caracteriza porque los estudiantes resuelven los problemas mediante una multiplicación de los valores; logran visualizar semejanzas; identifican un patrón conforme se muestra en la figura Nº 2.

Figura No.2 Ejemplo de la estrategia multiplicativa intermedia

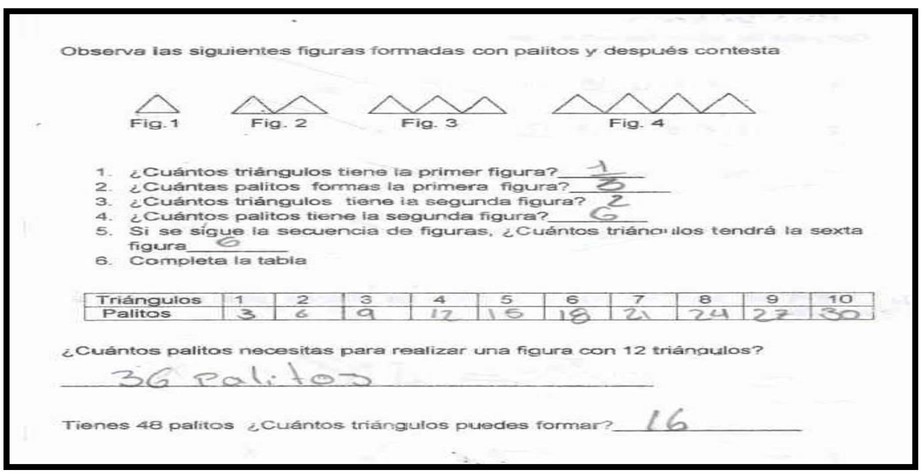

Observa las siguientes figuras formadas con palitos y después contesta

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

1. ¿Cuántos triángulos tiene la primer figura? 1
2. ¿Cuántas palitos formas la primera figura? 3
3. ¿Cuántos triángulos tiene la segunda figura? 2
4. ¿Cuántos palitos tiene la segunda figura? 6
5. Si se sigue la secuencia de figuras, ¿Cuántos triángulos tendrá la sexta figura 6
6. Completa la tabla

Triángulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Palitos	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

¿Cuántos palitos necesitas para realizar una figura con 12 triángulos?
36 Palitos

Tienes 48 palitos ¿Cuántos triángulos puedes formar? 16

Estrategia multiplicativa: esta categoría se caracteriza porque los estudiantes resuelven los problemas mediante una multiplicación de los valores, logran identificar el patrón, utilizan un pensamiento multiplicativo, logran la manipulación de literales y por consiguiente llegan a establecer una regla algebraica o pre-algebraica.

A continuación se da un ejemplo del cuestionario de los procesos de generalización (pregunta Nº 10) donde aparece la estrategia de resolución antes mencionada.

Estrategia multiplicativa

La pregunta Nº 10, se pide que observen la sucesion de figuras y que completen la tabla, los estudiantes tienen que visualizar las secuencias responder algunas preguntas.

Figura No.3 Ejemplo de la estrategia multiplicativa

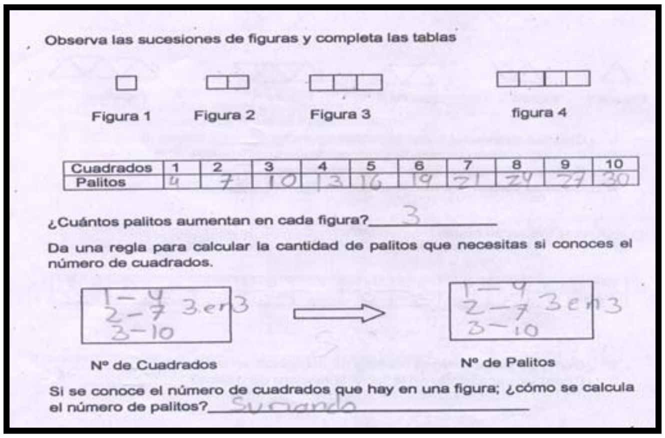

Observa las sucesiones de figuras y completa las tablas

Figura 1 Figura 2 Figura 3 figura 4

Cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Palitos	4	7	10	13	16	19	21	24	27	30

¿Cuántos palitos aumentan en cada figura? 3

Da una regla para calcular la cantidad de palitos que necesitas si conoces el número de cuadrados.

1 – 4
2 – 7 3 en 3
3 – 10

1 – 4
2 – 7 3 en 3
3 – 10

Nº de Cuadrados Nº de Palitos

Si se conoce el número de cuadrados que hay en una figura; ¿cómo se calcula el número de palitos? Sumando

A continuación se describe parte de la entrevista clínica individual

Trecho del protocolo

Entrevistadora (E): ¿Cómo resolviste el problema?

Jorge (J): *En la primera figura hay cuatro palitos, en la segunda figuras hay siete y así, le fui agregando tres*

E: Entonces, en la figura cuatro, ¿cuántos tendría que haber?

J: *Aquí, tendría que haber trece*

E: Da una regla para calcular la cantidad de palitos que necesitas, si conoces el número de la figura

J: Yo pienso que es el número de la figura por tres y luego le agregas uno, porque va incrementando de tres en tres

E: ¿Lo puedes expresar por medio de una regla?

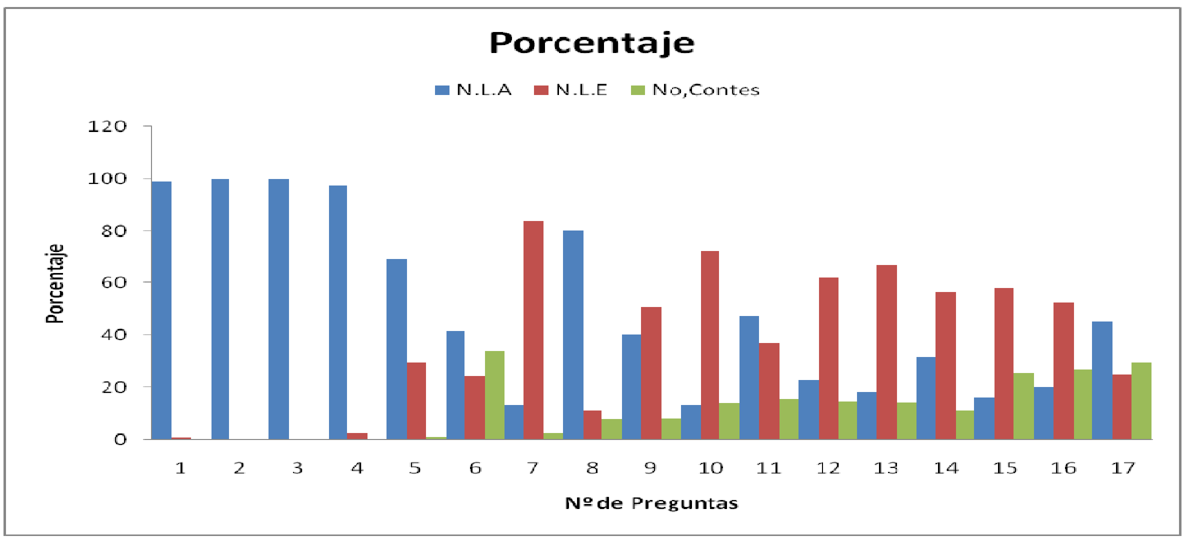
J: No, me di cuenta cuando me lo pregunto

Comentario: En este caso, se pudo observar que el estudiante se encuentra en un nivel de logro alto; debido a que, logra percibir la sucesiones aritméticas y geométricas, logrando visualizar el incremento que va teniendo cada figura, y lo puede expresar de forma coloquial, tiene nociones de cómo puede expresarlo por medio de una regla. De acuerdo a la propuesta de Mason, se puede evidenciar que el estudiante logra llegar a la primera y segunda etapa (ver y expresar un patrón), logra establecer una solución de pensamiento multiplicativo para llegar a la solución esperada pero; cuando se le pide expresarlo en forma escrita, se limita dar una respuesta sencilla.

Resultados del Cuestionario Inicial

Este trabajo se propuso investigar las dificultades que los estudiantes de primer año de secundaria presentan en la introducción al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización, con apoyo de la gráfica Nº 1, la cual expresa los Niveles de logro en relación al porcentaje.

Gráfica número 1 Descripción de los niveles de logro



NLA= *Nivel de Logro Alto*. NLE= *Nivel de Logro Bajo*. *No Contestó*

Niveles de Logro

Los estudiantes presentaron dificultad al identificar un patrón en las secuencias presentadas; aritmeticas y geometricas, utilizan un pensamiento aditivo, suman de manera progresiva. Posteriormente la propuesta de Mason, en las secuencias geometricas se cumple en parte, pues logran visualizar similitudes, llegan a la expresión oral, dado que cuentan las figuras y luego las multiplican, pero no se percatan de que pueden llegar a una regla para resolver el problema; no logran expresarlo de forma escrita (fórmula).

En la gráfica Nº 2 en el nivel de Logro alto, los estudiantes perciben cómo van incrementando o disminuyendo los distintas secuencias aritméticas y geométricas, y cuál es la relación entre las figuras presentadas; completan adecuadamente la secuencia; son capaces de visualizar las semejanzas y expresarlo oralmente, poseen nociones de recurrir a una fórmula con expresiones de literales. Por consiguiente, las estrategias que utilizan son de tipo aditivo; prosiguen las de tipo multiplicativo intermedio y esporádicamente logran desarrollar las respuestas con una estrategia de tipo multiplicativo; sin embargo se considera la forma de reestructurar las respuestas solicitadas; dado que al pedirles que explicaran el procedimiento utilizado, lo realizan ayudados con ideas pre-algebraicas lo que demuestra que los estudiantes tienen los conocimientos para acceder al pensamiento algebraico vía la generalidad.

Gráfica número 2 Descripción del nivel de logro alto

Resultados de la entrevista clínica individual

Los resultados muestran que los estudiantes poseen los conocimientos previos para desarrollar un pensamiento matemático y por consiguiente un pensamiento algebraico; así mismo se pudo observar en el estudio, que las dos primeras etapas de la propuesta de Mason, se cumplen, pero al registrar la información no lograron llegar a la generalización, lo que evidenciaron una dificultad de establecer una regla, finalmente, la validez de la misma no se logra de una forma significativa, de modo que conviene proponer actividades, que les permitan apropiarse fácilmente de estos conocimientos, y que se logre identificar del cómo llegar a la solución generalizada de diferentes problemas.

Conclusiones

Este estudio se propuso explorar el pensamiento algebraico de los estudiantes de 1º grado de secundaria vía los procesos de generalización, a partir de los contenidos matemáticos anteriormente explicitados, observando los niveles de logro alcanzados y sus relaciones con los dominios matemáticos explorados.

Es importante mencionar que este contenido matemático es enseñado de manera inicial en el primer año de secundaria y que posteriormente se enfatiza en los grados posteriores, los resultados del estudio evidencian que los estudiantes utilizan un pensamiento aritmético-aditivo, pues suman, dividen y multiplican esto evidencian que están en una etapa de transición de un pensamiento aritmético a un pensamiento multiplicativo, que da acceso al pensamiento algebraico.

Para alcanzar dicha transición se debe trabajar con un acompañamiento que les desvanezca las dudas presentadas, visto que, los conocimientos previos son adecuados, para que fundamenten los procedimientos planteados por Mason, donde el *ver, decir, expresar y validar,* puede ser la vía para acceder a un pensamiento algebraico de manera favorable, además la comprensión y construcción de significados debe ser la constante línea a seguir para llegar al álgebra.

Referencias bibliográficas

Butto, C. (2005). Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria tesis doctoral (pp.50-63); Tesis Doctoral; CINVESTAV. IPN. México.

Butto, C. y T. Rojano. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico (pp. 113-148); abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, vol 16, núm1.

Butto, C. y T. Rojano. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno logo (pp. 113-148); Educación Matemática, vol 22, núm 31.

Castro, E. L, Rico y E. Castro (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización (pp. 45-79) Grupo Editorial Iberoamericana. Bogotá.

Durán Ponce, R. (1999). Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Mason J. A, Graham. D, Pimm. & N, Gower. (1985). Rutas y Raíces hacia el álgebra The Open University Press, Great Britain.

Reggiani, M. (1994). "Generalization as a Basic for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 years Old Pupils" en Proceeding of the XVIII PME Conference Lisboa, Portugal, pp. 97-104.

Ursini, S. (1997). El lenguaje Logo, los niños y las variables In Educación Matemática vol 9, nª 2 agosto pp 30-42

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas In Educación Matemática, vol 8 no 2, agosto pp.33-40.

SEP Programa de estudio matemáticas. Ed. SEP. México 2006.

SEP Reforma de la educación secundaria. Ed. SEP México 2006.

SEP Educación básica secundaria Plan de estudio Ed. SEP. México 2006.