DE LA ARITMÉTICA AL CÁLCULO. LA RAÍZ CUADRADA Y SUS DISFUNCIONES EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

MARÍA PATRICIA COLÍN URIBE
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos Narciso Bassols, IPN

GUSTAVO MARTÍNEZ SIERRA
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN

RESUMEN: Una de las razones por las que iniciamos esta investigación sobre la raíz cuadrada fue el que este concepto desempeña un papel fundamental en todos los niveles escolares, desde los básicos hasta los universitarios. A pesar de ello, no encontramos evidencia de que se hubiera investigado sobre su problemática escolar. Así, al encontrarnos en nuestra experiencia docente con concepciones recurrentes de estudiantes cuando se trabaja con expresiones que involucran a la raíz cuadrada como

a) *la ecuación $x^2=4$ tiene sólo una solución la cual es $x=2$;*

b) la expresión $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ tiene cuatro valores que se obtienen de combinar los resultados $\sqrt{4}=\pm 2$ y $\sqrt{9}=\pm 3$, detectamos la complejidad propia de este concepto matemático.

A través de un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo, describiremos las concepciones que estudiantes tienen respecto al tratamiento de expresiones matemáticas que involucran a la raíz cuadrada a lo largo de su vida escolar.

PALABRAS CLAVE: **Raíz cuadrada, fenómeno didáctico, propiedad radicalizadora, disfuncionalidad.**

Introducción

Nuestra investigación se centra en estudiar este concepto desde el punto de vista de la aritmética, posteriormente del álgebra y por ultimo del cálculo, mediante el análisis de libros de texto y la aplicación de un cuestionario desde el nivel básico hasta el superior. Finalmente mostraremos concepciones específicas relativas a la raíz cuadrada que permanecen en los estudiantes.

La presente investigación tiene su marco de referencia en la Matemática Educativa, la cual tiene como uno de sus objetivos el de hacer descripciones del funcionamiento del sistema didáctico: *saber- profesor–alumno.*

Como lo mencionamos anteriormente, nuestro tema surge a partir de las concepciones de estudiantes de diversos niveles educativos sobre la función raíz cuadrada, y, siendo el sistema didáctico nuestro objeto de estudio, reconocemos la importancia del estudio de *fenómenos didácticos*; es decir aquellos fenómenos que suceden al seno del sistema didáctico conformado con la intención comunicar contenidos, métodos y significados matemáticos, de entre los cuales se derivan los *fenómenos ligados a las concepciones y representaciones de los estudiantes*.

Este trabajo encuentra su marco de referencia en la línea de investigación denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998); la cual busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio. En estas investigaciones se encuentran aquellas que prestan atención a la construcción de la noción de función (Farfán et al., 2002a, 2002b). Dentro de éstas se encuentran las investigaciones que elaboran explicaciones que dotan de particularidades a su explicación, especialmente en lo referente a las funciones trascendentes como lo son las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. Nuestro objetivo es mostrar que también las funciones racionales, en particular la construcción de la raíz cuadrada, posee particularidades específicas que generan fenómenos didácticos específicos.

Así, describiremos los fenómenos didácticos ligados a las concepciones de los estudiantes respecto a la raíz cuadrada a lo largo de su vida escolar.[1]

De acuerdo con nuestra perspectiva sistémica la descripción de las concepciones se encuentran estrechamente ligados a los aspectos escolares y a la naturaleza y significados de la raíz cuadrada, como ejemplo podemos mencionar que en matemáticas la noción de “raíz” posee al menos dos significados explícitos. La primera es usada para señalar cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación. La segunda acepción es usada para señalar a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado. En este sentido la radicación (la acción de determinar la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado) es considerada la operación inversa de la potenciación (la acción de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado). En particular, la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. El operador tradicional para esta operación es el símbolo $\sqrt[2]{\ }$, pero convencionalmente se utiliza el símbolo $\sqrt{\ }$.

Así, la noción de raíz cuadrada es un operador[2] matemático relacionado con otro operador (elevar al cuadrado) a través de un proceso inverso. De esta manera los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada está fuertemente condicionado a aquellos presentes en el operador elevar al cuadrado y aquellos presentes en los procesos inversos de un operador.

Nuestra investigación consta de un análisis epistemológico, un análisis didáctico y un análisis cognitivo.

Análisis epistemológico

En este apartado pretendemos responder a la pregunta ***¿Cuál es la naturaleza y significados de la raíz cuadrada?*** Así, trataremos de determinar los significados y funcionalidad de la raíz cuadrada desde un punto de vista histórico-epistemológico; estudiamos a grosso modo diferentes épocas rastreando que tipo de construcciones fueron realizadas en relación a la raíz cuadrada en tanto un operador matemático que se desarrolla e incluye en al menos cuatro contextos diferentes: el geométrico, el aritmético, el algebraico y el funcional. En el contexto aritmético el operador raíz cuadrada se aplica a números concretos, en el contexto algebraico es aplicado a números generalizados e incógnitas y en el contexto funcional es aplicado a variables. Aunque en el contexto geométrico no encontramos mucha información, podemos mencionar que en el Libro II, de los Elementos de Euclides se muestra la presencia de una especie de “raíz cuadrada geométrica”; entendido esto como un proceso inverso al de construir un cuadrado de un segmento de recta, es decir, la raíz cuadrada está determinada por la “línea recta” que produce un área dada. Cabe notar que este proceso puede ser identificado “cuadrar” una figura. En cuanto a los babilonios, este concepto era utilizado para “cuadrar” rectángulos. En el papiro de Berlín se encuentra registrado un problema que muestra como calculaban raíces cuadradas

En el contexto aritmético no encontramos evidencia en los escritos de Euclides, pero en cuanto a los babilonios, se han encontrado tablillas que contienen tablas de cuadrados de números, e incluso un problema resuelto en el que se muestra un algoritmo para calcular raíces cuadradas.

En el contexto algebraico existen diversas interpretaciones que pueden darse a la letra en contextos algebraicos (Rojas et al., 1997; Ursini, 1996), para nuestra investigación interesan las siguientes

a) Letra como incógnita. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido.

b) Letra como número generalizado. La letra se interpreta como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor especifico.

En términos bastante resumidos, encontramos información en el Libro primero de *Arithemetica Algebratica* de Marco Aurel (publicado en Valencia en 1552) y al que hace referencia (Melvilla, 1993) y al de Chuquet en *La triparty en la Science des Nombres* (documento fechado en 1484) del cual hace referencia (Paradís, 1993).

Por ultimo, en el contexto funcional, encontramos obras de finales de siglo XVI en donde no es posible encontrar curvas con ecuaciones del tipo $y = \sqrt{x}$, pero sí la curvas con ecuaciones del tipo $y^2 = x$. Esto señala que el operador raíz cuadrada no es necesario en contexto en donde las variables no guardan ninguna jerarquía una respecto a otra

Análisis didáctico

En este apartado pretendemos contestarnos la pregunta ***¿Cuáles son las costumbres escolares al momento de tratar la raíz cuadrada?*** En esta parte realizamos una revisión bibliográfica de los libros de texto de matemáticas que se utilizan en los diferentes niveles educativos mexicanos. Encontramos que el operador raíz cuadrada es oficialmente introducido en el primer año de Educación Secundaria. En este grado, es utilizado implícitamente como la operación inversa de elevar al cuadrado números naturales, es decir, únicamente se obtienen raíces cuadradas exactas a través de tablas de cuadrados que los estudiantes han obtenido previamente. El tema es nuevamente tratado hasta tercer año, con el cálculo de raíces cuadradas por diversos métodos (algoritmo tradicional o método de la “casita”, babilonio, gráfico, de newton y aproximación). Aquí, la raíz cuadrada de un número puede ya tener parte decimal.

En general, los libros de texto autorizados por la SEP para la Escuela Secundaria definen al proceso de calcular raíces cuadradas como

"La raíz cuadrada de un numero ***a*** (donde *a*>0) es otro numero ***b*** tal que al elevarlo al cuadrado sea igual a ***a*** , es decir, ***b*** es la raíz cuadrada de ***a*** si $\boldsymbol{b^2=a}$ "

En cuanto a los libros de texto utilizados para los niveles medio superior y superior, encontramos que éstos manejan la noción de raíz cuadrada en tres contextos, el algebraico, el aritmético y el funcional.

En el plano aritmético las definiciones que encontramos sobre la raíz cuadrada son las siguientes:

- (Baldor, 1990) $\sqrt[n]{a}=b$ significa que $b^n=a$. Además, la raíz cuadrada exacta de un

número es el número que elevado al cuadrado reproduce exactamente el número dado. Así, 3 es la raíz cuadrada exacta de 9, porque $3^2 = 9$ y 5 es la raíz cuadrada exacta de 25 porque $5^2 = 25$.

- (Wentworth y Smith,1985) define dos significados de la palabra raíz

a) la raíz de un número es todo número del cual el primero es una potencia y b) Se le llama raíz al valor de la incógnita o incógnitas de una ecuación. Este autor afirma que:

"*Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas que son numéricamente iguales pero de signos contrarios*", así, 9 tiene dos raíces cuadradas, el 3 y el -3". Una vez que se ha definido la raíz cuadrada, se introduce el concepto de raíz aritmética, la cual es la real positiva, es decir, sólo se tomarán las raíces cuadradas positivas y se hace la consideración de que ***el radical por sí solo representa la raíz cuadrada aritmética***

Así, en el plano aritmético, se conviene que la raíz cuadrada de un número será la raíz cuadrada aritmética.

En el plano algebraico encontramos que Lehmann (2001) afirma que $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ significa 2 + 3 y no $\pm 2 \pm 3$, pero los valores de la ecuación $x^2=5$ se expresan como $x=\pm\sqrt{5}$ y no como $x=\sqrt{5}$

Es así como en el discurso matemático escolar encontramos disfunciones[3] tales que hacen que el concepto raíz cuadrada cambie de significado al pasar de un contexto aritmético a un contexto algebraico.

En un plano funcional, encontramos que de acuerdo a la definición usual de función (función uniforme) la expresión $y = \pm\sqrt{x}$ no representa una función. Asumiendo que en el contexto algebraico, se había convenido que la raíz cuadrada tendría dos valores, ($x = \pm 2$) podemos decir que el significado de la raíz cuadrada cambia en el tránsito del contexto algebraico al contexto funcional.

Es así como en el discurso matemático escolar encontramos disfunciones tales que hacen que el concepto raíz cuadrada cambie de significado al pasar de un contexto algebraico a un contexto funcional.

Por lo tanto, el significado del operador raíz cuadrada dependerá del contexto en el que nos encontremos

Análisis cognitivo

Con este apartado pretendemos contestar la pregunta: ***¿Qué concepciones poseen los estudiantes respecto a la raíz cuadrada?*** Para contestar esta pregunta utilizamos un cuestionario el cual aplicamos a estudiantes de distintos niveles educativos: Educación Secundaria, Educación media superior y superior.[4] Las concepciones resultantes fueron las siguientes:

La raíz cuadrada NO es una operación básica, puesto que no aparece en los cálculos cotidianos

El operador raíz cuadrada es proceso que permite encontrar números tales que al multiplicarlos por si mismos nos den el número que se encuentra dentro del operador, pero los números negativos NO SON CONSIDERADOS como raíces cuadradas independientes

La ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene una sola solución, puesto que sólo se toman en cuenta las raíces principales

La radicación es la operación inversa de la potenciación, y podemos extenderla a todos los reales, por lo cual es válido lo siguiente

$$\sqrt{a^2} = a$$

La expresión $\sqrt[2]{a}$ representa una división en la cual voy a encontrar la mitad del número dentro del operador

Las propiedades de la igualdad se extienden a los radicales, por lo cual es válido que ***Si*** $a = b \quad entonces \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$

Conclusiones

- Tanto profesores como estudiantes establecen el "teorema de facto"[5] siguiente: Si a, b, c son números cualesquiera, tales que $a = b, \quad entonces \quad \sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$. En particular, si $c = 2$: Si $a = b$ entonces $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

A esta "propiedad" le llamamos "propiedad radicalizadora de la igualdad" para designar la práctica escolar cotidiana que determina que $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ y Si $a = b$ entonces $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

- La radicación es la operación inversa de la potenciación, la cual genera que se llegue a resultados del tipo:

$$\sqrt{(-2)^2} = \underline{\quad -2 \quad}$$

Pero que funciona en el caso:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = x + \frac{b}{2a}.$$

$$\sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a.$$

- La raíz cuadrada tiene dos valores, pero de signos contrarios, es decir, el operador $\sqrt{\ }$ genera dos resultados, pero en el contexto aritmético, únicamente se utiliza el valor positivo o raíz principal. Esta concepción genera respuestas como la siguiente cuando el estudiante se encuentra en el contexto algebraico:

$$x^2 = 4 \approx x = \sqrt{4}$$
$$x = 2$$

Como nuestro trabajo tiene un enfoque sistémico, la integración de los resultados obtenidos en cada uno de los apartados es la siguiente:

Nuestro análisis epistemológico muestra evidencia de la necesidad de introducir un algoritmo para el cálculo de raíces cuadradas. Chuquet nos muestra un método para resolver ecuaciones de segundo grado. El análisis didáctico muestra que existen diversos algoritmos para calcular raíces cuadradas, así como la fórmula general para encontrar soluciones de ecuaciones de segundo grado. El análisis cognitivo nos muestra los "métodos" que utilizan los estudiantes para hacer este tipo de cálculos. Tomando como antecedente estos hallazgos, tenemos lo siguiente:

- Chuquet, a pesar de aceptar y manejar números con signo ($\overline{m}R_{\lambda}^{2}12^{3}$ para indicar $-\sqrt{12x^{3}}$), no parece considerar el signo – para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática.

- Los libros de texto nos muestran que al calcular raíces cuadradas de números concretos, sólo se tomará la positiva (a la que se llamará raíz principal)

- Los estudiantes omiten el signo negativo de la raíz al considerar únicamente la raíz positiva para el cálculo de soluciones de una ecuación del tipo. $x^{2} + a = 0$

- Finalmente concluimos que, el operador $\sqrt{\ }$ tiene diferentes significados cuando se aplica a números concretos (contexto aritmético), números generalizados (contexto algebraico) y variables (contexto funcional). Las disfunciones escolares en el manejo de este operador en el tránsito de contextos (aritmético, algebraico y funcional) generan fenómenos didácticos específicos.

Notas

1. Para lograr esto tomamos una muestra de estudiantes de los diferentes niveles educativos mexicanos

2. En este trabajo entenderemos como operador a un símbolo matemático que denota un conjunto de operaciones que han de realizarse sobre cierto tipo de objetos

3. Entenderemos por disfunción escolar a la ambigüedad que produce el empleo escolar de significados que en un contexto son válidos pero fuera este no lo son

4. Estudiantes entre los 15 y los 22 años

5. Según (Vergnaud, 1992) citado en (Farfán, 1997), estos teoremas están ligados a la “inducción de las propiedades válidas” y en el “recurso de la analogía”.

Referencias

Baldor, A. (1990). Aritmética. España, Ediciones y distribuciones Códice

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Épsilon, Revista de la S.A.E.M. “Thales”. 42, 353-369.

Euclides (2002). Los elementos de Euclides. Versión electrónica disponible en http://www.euclides.org/menu/elements_esp/02/proposicioneslibro2.htm

Farfán, R., Albert, A. y Arrieta, J. (2000a). Resolución gráfica de desigualdades. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M.; Martínez-Sierra, G. y Ferrari, M. (2000b). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000). *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM- Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al “Libro primero de arithmetica algebratica” de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991. (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Cehuquet. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991. (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Rojas, P. et al. (1997). La variable matemática como problema puntual. En La transición Aritmética al Álgebra (Capítulo 39, pp. 30-66). Colombia: COLCIENCIAS y Universidad Distrital Francisco José Caldas (Santa Fe de Bogotá)

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. Educación matemática. 8(2), 33-40.

Wentworth, J. y Smith, D. (1985). Álgebra. México: Editorial Porrúa.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado en el marco del proyecto “*Un estudio exploratorio sobre la incorporación de gráficas en el tratamiento de algunos conceptos del Cálculo Diferencial en el Nivel Medio Superior*”. Registro asignado por la SIP del IPN: 20110239