EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN, PRIMERAS APROXIMACIONES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y SU EFECTO EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SUPERIOR

MARTHA GARCÍA RODRÍGUEZ / FABIOLA RUIZ LEDEZMA[2]

RESUMEN:
El presente trabajo muestra parte de los resultados de dos proyectos de investigación desarrollados en el IPN, relacionados con el estudio de la variación, concepto que es esencial para analizar diferentes fenómenos físicos y de la vida cotidiana. En el nivel básico los estudiantes inician el estudio de la variación proporcional directa e inversa, sin embargo no logran darle sentido a este concepto y su trabajo muchas veces se reduce al empleo de la regla de tres. Estas nociones forman parte de los conocimientos de los estudiantes y son aplicadas aún en el nivel superior, obstaculizando el análisis del comportamiento global de diferentes funciones. El diseño de actividades que incluyan diferentes funciones: lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica etc., y la discusión en grupos de estudiantes, es esencial para que ellos identifiquen que la relación entre las variables de un problema no necesariamente es proporcional. Los resultados que se presentan en este documento muestran la necesidad de efectuar investigaciones, relacionadas con este concepto, que incluyan estudiantes de nivel básico, medio superior y superior.
PALABRAS CLAVE: variación, regla de tres, función, variables.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los fenómenos que cambian es esencial en los cursos de Cálculo para estudiar el concepto de variación, su conocimiento implica identificar y entender cómo se relacionan las cantidades en un problema particular. Más aún, permite medir y analizar como cambian estas cantidades. Por ejemplo, cambios en la temperatura, peso, posición, población, velocidad, etc. (Bassein, 1993) señala que la investigación efectuada para llegar a establecer leyes universales e inmutables para estudiar fenómenos que cambian, probablemente ha sido la más poderosa motivación del hombre para construir modelos, los cuales se representan en la forma de ecuaciones que expresan relaciones entre variables. Indica que debido a que estos modelos contienen sólo la información necesaria de los fenómenos de los que surgen, es posible que puedan ser aplicados en otras situaciones.

Pese a la importancia del estudio de la variación, las investigaciones relacionadas con este tópico, documentan que los estudiantes que ya han cursado la asignatura de Cálculo tienen dificultades para: proponer y trabajar con expresiones algebraicas que representan relaciones entre cantidades; obtener información de la gráfica de una función; identificar los intervalos en que es creciente o decreciente; y, relacionar las representaciones tabular, algebraica y gráfica de estas funciones.

En los Planes y programas de estudio de Educación Primaria en México (Secretaría de Educación Pública, 2001), se incluye en el eje denominado "procesos de cambio" la noción de variación y se refiere exclusivamente a desarrollar en el estudiante lo concerniente a variación directamente proporcional e inversamente proporcional, es decir, se trabajan las variables tanto independientes como dependientes, enfocadas sólo a la idea de proporcionalidad. Por otra parte, Piaget (1978) comenta que en niños de 11 y 12 años se identifica la noción de las proporciones en diferentes ámbitos: las proporciones espaciales (figuras semejantes), las relaciones entre pesos y longitudes de los brazos en la balanza, las probabilidades, etc. Piaget (1978), Streefland (1991) y Ruiz (2002), enfatizan que para que el estudiante logre desarrollar de forma correcta la noción de variación directamente proporcional, es necesario partir de las nociones de ampliación y reducción siguiendo la idea de la fotocopiadora o del dibujo a escala, asumiendo que el estudiante a muy temprana edad logra reconocer lo que es proporcional.

Por otra parte, Hart (1988), Lesh (1998) y Ruiz (2002), indican que la noción de variación directamente proporcional es representada por los alumnos mediante el uso de la regla de tres, es decir de una forma mecánica, porque así es enseñada por la mayoría de los profesores, sin que se promueva en el estudiante un pensamiento proporcional cualitativo antes del cuantitativo para darle sentido al uso de la variación proporcional.

Para los estudiantes que cursan el bachillerato o los primeros años de universidad, el tema de variación se fundamente en el concepto de función, de esto se puede inferir que la conexión entre las variables independiente y dependiente y los cambios en la variable dependiente, para cambios en la variable independiente, son elementos esenciales para el conocimiento de la razón de cambio y la construcción e interpretación de gráficas que representan diferentes fenómenos.

Las ideas planteadas en los párrafos anteriores han sido el punto de partida en el diseño e implementación de una investigación que tuvo como propósito: analizar y documentar los procesos de pensamiento que siguen los estudiantes para desarrollar el concepto de variación, cuando trabajan en problemas matemáticos que representan situaciones cotidianas.

Este documento tiene dos objetivos, el primero es presentar algunos resultados, de la investigación que se desarrolló, que muestran que los estudiantes consideran, en sus primeras exploraciones, que las variables involucradas en los problemas están relacionadas mediante una variación proporcional. Destacando la idea de que los estudiantes de bachillerato tienen un pensamiento similar al que se desarrolla en los estudiantes de nivel básico. El segundo objetivo es presentar actividades que contribuyan a que el estudiante de bachillerato construya el concepto de variación y supere la creencia de que todo varía de forma proporcional.

REFERENTES TEÓRICOS

En la literatura relacionada con el estudio de la variación se encuentra una recomendación primordial expresada por Nemirovsky (1992) por Hauger (1995) y García y Santos (2004).

Nemirovsky (1992) señala:

> la construcción de un acercamiento variacional es un proceso complejo que involucra coordinación de muchas piezas diferentes de conocimiento. Toma lugar a lo largo del tiempo e incluye pasos hacia delante y hacia atrás. Con frecuencia un estudiante parece tener construidos elementos de un acercamiento variacional, pero en la solución de un problema más complejo regresa a usar técnicas no variacionales como las de semejanza. (p. 21)

Huger indica la conveniencia de desarrollar tres tipos de conocimiento de la razón de cambio, para que un estudiante identifique el comportamiento de una función: razón de cambio global, en un intervalo y puntual. La razón de cambio global es concomitante con las propiedades generales de una función, como su monotonía. El conocimiento de la razón de cambio, en un intervalo, se refiere al cambio de la variable dependiente para diferentes intervalos en los que se encuentra la variable independiente. Razón de cambio puntual (instantánea) tiene que ver con qué rapidez cambia la variable dependiente respecto a un valor de la variable independiente. Hauger señala que estos tres tipos de conocimiento de la razón de cambio pueden ser examinados utilizando diferentes representaciones de las funciones, incluyendo gráficas, tablas de valores, ecuaciones y descripciones verbales.

Por su parte, Nemirovsky considera que es importante incluir en el trabajo de los estudiantes un análisis local y global de las funciones. De acuerdo con el autor, son las actividades de aprendizaje las que posibilitan que un sujeto empiecen a recurrir a acercamientos alternativos, que les permiten conocer la información que proporciona la gráfica de una función y relacionarla con la gráfica de su derivada. A dicha forma de trabajo le llama acercamiento variacional.

García y Santos (2004) encontraron que cuando los estudiantes utilizan las funciones como relaciones entrada-salida tienen dificultades para realizar un análisis global de la función. Recomiendan que analicen las funciones por intervalos para identificar características globales de las funciones.

Del trabajo de Hauger, Nemirovsky y García y Santos, se puede inferir que para el estudio de los fenómenos que involucran cambio o variación, es recomendable que los alumnos exploren problemas en los que identifiquen, interpreten y analicen los comportamientos local y global de las funciones.

SUJETOS MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

La investigación, de la que aquí se reportan algunos resultados, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo.

Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar tres actividades, de las que aquí se reportan dos, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron el comportamiento local y global de funciones. Estos elementos se consideran importantes en el estudio del Cálculo y fueron presentados en los párrafos anteriores.

El estudio se llevó a cabo con 25 estudiantes de nivel universitario en un primer curso de matemáticas.

El número de sesiones para cada actividad fue variable, de acuerdo con el tiempo que los estudiantes necesitaron para la exploración y análisis de la información, y la discusión de las ideas matemáticas importantes involucradas en el proceso de solución.

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

1) Reportes escritos elaborados en forma individual.
2) Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
3) Grabaciones en audio y video del trabajo de los estudiantes.
4) Reportes elaborados por el profesor-investigador.
5) Archivos de Excel guardados en discos flexibles elaborados por los estudiantes forma individual y en pareja.

ANÁLISIS DE DATOS

Los elementos que guían el análisis son:

1) Identificar la forma en que los estudiantes representan y explican situaciones que involucran cambio o variación.
2) Conocer cómo relacionan las variables involucradas.
3) Documentar la forma en que transitan de un análisis puntual o local a una explicación global.
4) Conocer la forma en que construyen relaciones funcionales.

Es importante destacar que un objetivo de este artículo es documentar que una primera forma de trabajo de los estudiantes es considerar que las variables se relacionan en forma proporcional, por lo que el análisis de los datos y la discusión se efectuarán en esta dirección, sin restar importancia al desarrollo del concepto de variación.

En este documento se describe el trabajo de cuatro estudiantes en dos actividades. El análisis de los reportes escritos, de los videos y de las entrevistas proporcionó elementos para conocer acerca de los procesos de construcción de relaciones entre representaciones que siguieron los estudiantes, al trabajar en las actividades. Los fragmentos que aquí se presentan se refieren al trabajo de Edgar y Luis que se consideran representativos del grupo.

Primera actividad. Asistencia al concierto

El número de personas que asisten a un evento depende del costo del boleto. Esta situación se puede representar mediante la siguiente fórmula $A(p) = 2500 - 175p$ donde

A = número de personas que asisten al evento.

p = precio del boleto de entrada.

Preguntas de la actividad:

a) ¿Cuál es el número máximo de personas que pueden asistir al concierto?

b) ¿Cuál es el precio máximo que se puede cobrar por la entrada al concierto para garantizar la asistencia de por lo menos 10 personas?

c) ¿Cuál será la asistencia al concierto si el precio del boleto es de $10?

d) ¿Cuál será la asistencia si la admisión es libre?

Edgar y Luis inicialmente trabajaron en forma individual, realizaron un análisis puntual de la función, sustituyeron diferentes valores del precio del boleto en la fórmula proporcionada y con estos valores respondieron en forma correcta el inciso c. Para responder el inciso b despejaron la variable p y sustituyeron el número de personas que asistían al concierto (Figura 1), con esto dieron respuesta a la pregunta ¿cuál es el precio... para tener una asistencia de...? en lugar de ¿cuál es el precio máximo... para tener una asistencia de por lo menos....?

$$A(p) = 2500 - 175(\ ) = 10$$

$$\frac{2500-10}{175} = 14{,}228$$

Figura 1. Respuesta de Edgar y Luis al inciso b

Las afirmaciones de Luis confirman lo anterior:

Aquí despejo y puse un valor de 10 personas para sustituir y llegar a la conclusión de que $14 debe ser el precio mínimo para una entrada de 10 personas.

Esta forma de trabajo fue representativa del grupo. Sin embargo Carlos (otro estudiante del grupo) señaló que no entendió cómo utilizar la fórmula. Consideró el problema como de variación proporcional directa. En su reporte escribió:

Pensé que todo iba a ser con una sencilla regla de tres, pero no resultó. Después, con las preguntas que puso la maestra empecé a ver otra perspectiva del problema y comprendí que sólo iba a variar p y A.

Se puede afirmar que el trabajo de Edgar y Luis fue similar al de Carlos. Respondieron correctamente las preguntas puntuales, sustituyendo el precio del boleto en la fórmula proporcionada. Para responder el inciso b sustituyeron el número de personas y despejaron el precio del boleto.

Después de identificar que esta forma de trabajo se presentó en la mayoría de los estudiantes, el investigador intervino para orientar su reflexión hacia la pregunta del inciso b (considerar la asistencia de 10 o más personas).

Investigador: *¿Qué significa que asistan por lo menos 10 personas?*

Carlos: *Sería de 10 en adelante*

Otros compañeros del grupo intervinieron dando ejemplos del precio del boleto para 10, 11, 12… personas. Otro estudiante sugirió elaborar una tabla con un incremento de 10 personas desde 0 hasta 2500. Carlos dirigió la discusión, expresó verbalmente el significado de *por lo menos 10* y respondió correctamente los incisos restantes, modificando de esta forma el análisis local que había realizado inicialmente a un análisis por intervalo de 10 asistentes a 2500. Con esto concluyó la sesión.

Segunda actividad. El problema de las torres

El problema solicita desarrollar una fórmula para calcular la mayor distancia que se puede ver desde lo alto de un edificio. Si h es la altura en metros del punto de observación, la distancia de visibilidad en kilómetros se debe escribir como una función de la altura.

La actividad incluyó las siguientes indicaciones:

Calcular la distancia de visibilidad que se alcanza desde lo alto de diferentes edificios.

Elaborar una tabla donde se relacionen alturas con valores de s(h)

Realizar interpolación para determinar la distancia de visibilidad a partir de una gráfica de la función s(h).

Determinar la altura que debe tener un edificio para alcanzar a ver x kilómetros.

Analizar el cambio en la distancia de visibilidad cuando se incrementa la altura.

Describir la tendencia de los cambios del inciso d).

Para ejemplificar el trabajo desarrollado por los estudiantes en esta actividad se describe lo efectuado por Fernando.

Fernando explicó a sus compañeros su trabajo. Trazó un dibujo de la tierra, un edificio y un segmento que representaba la distancia de visibilidad (Figura 2), obtuvo información de las propiedades de la tangente y el radio de una circunferencia y pensó en la posibilidad de utilizar el Teorema de Pitágoras y obtener una función para la distancia de visibilidad.

Figura 2. Figuras elaboradas por Fernando

Fernando consideró que la distancia de visibilidad aumentaba en forma proporcional a la altura de los edificios, como lo señaló a sus compañeros.

Fernando: *Yo lo pensé de esta manera: consideré la torre CN de Ontario y quise hacer una regla de tres utilizando su altura y así para todas las alturas.*

Con la intervención de otros estudiantes del grupo, Fernando identificó que la recta tangente es perpendicular al radio de la circunferencia, asoció uno de los catetos con la distancia de visibilidad y la hipotenusa con el segmento formado por el radio de la tierra más la altura del edificio.

El desarrollo que Fernando realizó en el pizarrón se escribe a continuación:

Radio ecuatorial de la tierra = 6378 km

$R + h = hip \qquad R = c.a. \qquad d = c.o.$

$a^2 = b^2 + c^2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}$

$d = \sqrt{2Rh + h^2}$

Dividió entre mil para convertir la altura de los edificios a kilómetros y obtener el resultado en kilómetros. Fernando identificó que el valor de la altura al cuadrado era menor que el radio de la tierra y escribió:

Despreciando h^2 *porque es mucho menor que el radio de la tierra*

$d \approx \sqrt{2Rh}$

Para verificar la veracidad de la fórmula calculó la distancia de visibilidad para un edificio de 555 metros de altura.

Las ideas que los estudiantes discutieron a partir de la participación de Fernando fueron:

Si utilizar el radio polar o el radio ecuatorial.

La forma de obtener el resultado en kilómetros en lugar de metros.

Verificar las condiciones para eliminar el valor de h^2 en la fórmula $d = \sqrt{(2)(6378)h + h^2}$.

Cuando los estudiantes resuelven problemas en los que tienen que formular un modelo matemático una primera estrategia que emplean es considerar que las cantidades cambian en forma proporcional. Aún cuando la fórmula es proporcionada García y Santos (2004) reportan que los estudiantes sustituyen valores en la fórmula y asumen que la relación entre las variables es lineal, sin efectuar un análisis del comportamiento general de la función.

DISCUSIÓN

De los resultados que se muestran en este documento se puede inferir que la noción de variación directamente proporcional, mediante la aplicación de la regla de tres, que se enseña a los estudiantes de nivel básico, permanece en los estudiantes de nivel superior. Los alumnos la emplean como una estrategia durante sus exploraciones iniciales. Sin embargo, como señalan Hart (1988), Lesh (1988) y Ruiz (2002), los escolares la aplican en forma mecánica, sin tener un pensamiento proporcional cualitativo. Estas ideas ayudan a comprender por qué estudiantes como Carlos, asumen que una expresión como $A(p) = 2500 - 175p$, que se proporcionó en la actividad, corresponde a una relación proporcional entre las variables A y p; y por qué estudiantes como Fernando emplean la regla de tres para responder las preguntas de la actividad.

Estos resultados son importantes debido a que permiten conocer la forma en que los estudiantes emplean los conocimientos adquiridos en niveles educativos anteriores, y contribuyen para que se analice con mayor cuidad la forma en que se enseña la idea de variación en el nivel básico. No obstante, es necesario realizar investigaciones de mayor duración que brinden información más amplia acerca de la idea de variación en los estudiantes de nivel básico medio superior y superior.

AGRADECIMIENTOS

Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] para realizar y presentar este artículo.

Las investigaciones con números de registro 20070368 y 20070757 han sido apoyadas por la SIP del IPN.

REFERENCIAS

Bassein, S. (1993). *An Infinite Series Approach to Calculus*. Houston, Texas: Publish or Perish, Inc.

García, M. y Santos, M. (2004). *On the instrumentation process of a computational tool*. Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Toronto: OISE/U, 3, 1433

Hart, K. (1988). "Ratio and proportion", en: J. Heibert y M.Behr (eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades, 2*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hauger, G. (1995). *Rate of change knowledge in high school and college students*, ponencia presentada en la reunión anual de la American Educational Research Association. San Francisco, CA (consultado: 18 de julio de 2006, de: http://www.eric.ed.gov:80/ERICWebPortal/)

Lesh, R.; Post, T. y Behr., M. (1988). "Proportional reasoning", en: J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 93-139.

Nemirovsky, R. (1992). *Students´ Tendency to assume resemblances between a function and its derivative*. Reports-Research/Technical (143) (consultado: 16 de mayo de 2006, de http://edres.org/eric/ED351193.htm)

Piaget, J. (1978). “Las operaciones intelectuales y su desarrollo”, en J. Delval (Comp.), Lecturas *en Psicología del Niño, I* (70-119). Madrid: Alianza Editorial.

Ruiz, E. F. (2002). *Estudios de estrategias de solución y una propuesta de enseñanza de razón y proporción,* tesis doctoral, México: CINVESTAV. IPN.

Secretaría de Educación Pública (2001a). *Plan de programas de estudio. Educación Básica. Primaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, México: SEP.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*, tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers.