ACTIVIDADES REVELADORAS DEL PENSAMIENTO: MÁS QUE UNA FORMA DE APRENDIZAJE ACTIVO

ÁNGELES DOMÍNGUEZ CUENCA

RESUMEN:

Este estudio tiene como objetivo el presentar las ventajas de las actividades reveladoras del pensamiento (Lesh y Kelly, 2000) como una herramienta de evaluación formativa. Este estudio se llevó a cabo en un curso de Cálculo para ingeniería y Ciencias Naturales. La actividad que se trabajó en la clase involucra una situación de optimización de ganancias en el contexto de un hotel considerando gastos de mantenimiento y ciertas condiciones respecto a la tarifa diaria del hotel. La duración de la actividad fue de dos sesiones de 50 minutos. Los estudiantes trabajaron en la actividad en pequeños grupos colaborativos. Dentro de las conclusiones se tiene que la diversidad de soluciones de los estudiantes es una muestra de la riqueza de las respuestas presentadas por los estudiantes. Las soluciones propuesta por estos estudiantes universitarios, se contrastan con las estrategias y modelos expuestos por estudiantes de primero de secundario quienes resolvieron la misma actividad (Aliprantis y Carmona, 2003). Con este contraste se pretende evidenciar que la matemática no está en el problema, sino en la solución. Asimismo, el análisis realizado permitió reconocer los modelos y estrategias más recurridas por los estudiantes, dando así información sobre las ideas y nociones que tienen más aprendidas.

PALABRAS CLAVE: Actividades reveladoras del pensamiento, Evaluación formativa, Model-eliciting activities, Resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas a sido temática central de las matemáticas desde hace ya varias décadas. Entre los trabajos sobre resolución de problemas se tiene las investigaciones de Poyla (1945), Schoenfeld (1985), Lesh, y Kelly (2000), Lesh y Doerr (2003) y Sepúlveda, Santos y García (2007), por citar algunos. Este estudio se basa en las teorías propuestas Lesh et al (2000). En particular, este

estudio se enfoca al análisis de la implementación una actividad que cumple con las características de ser una actividad reveladora del pensamiento (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000). El objetivo de este estudio es presentar la riqueza de estas actividades a través del análisis de las soluciones expuestas por los estudiantes. Esta riqueza es evidente e inmediata tanto para los estudiantes, como para el profesor favoreciendo así la evaluación formativa.

MARCO TEÓRICO

Las actividades reveladoras del pensamiento (MEA, por sus siglas en inglés) son nombradas así ya que evocan el pensamiento de los estudiantes. Como en la resolución de problemas se trabaja en grupos pequeños 3 o 4 estudiantes, y se les da un problema el cual tiene más de una respuesta y más de una manera de plantear una respuesta. Además, el problema pide a los estudiantes que propongan una generalización a su modelo y una argumentación a su respuesta. Desde una perspectiva de evaluación formativa, no se considera que haya respuestas equivocadas, sino respuestas más eficientes. El énfasis está en la argumentación a dicha solución (Lesh, y Kelly, 2000).

En cuanto a los contextos de los problemas se trata de que sean realistas, de que le permitan al estudiante involucrarse y usar la matemática como un medio para comunicar y resolver. De ahí que evocan el pensamiento. Si los estudiantes resuelven un problema aplicando estrategias matemáticas empleadas en clase, se tiene evidencia de que el estudiante está haciendo la conexión entre la matemática del salón de clases y las matemáticas fuera del salón de clases como una herramienta de resolución. Así mismo, la estrategia empleada denota el grado de aplicación de los conceptos y procedimientos estudiados, por ejemplo, si resuelven un problema tabulando o lo resuelven planteando una ecuación. La solución no estaría mal, solamente no es eficiente. En palabras de la doctora Guadalupe Carmona, “la matemática no está en el problema, sino en la solución”. Como no son problemas típicos de la clase, las estrategias propuestas por los estudiantes y la documentación de dichas estrategias sirven para dar

una retroalimentación inmediata tanto al profesor como al estudiante. Otra característica de las MEA es que sirven como referencia para tratar otros temas en clase. Puede ser usada para abrir un tema o para dar extenderlo. La riqueza está en las soluciones y en las conexiones que el profesor pueda realizar al usar las soluciones como referencia.

La estructura de las MEA consta de un artículo sobre un tema realista y un caso específico sobre ese tema. Primeramente se les da a los estudiantes el artículo, y luego se les hace unas preguntas para ubicarlos en el tema. A continuación se les da el caso específico, el cual es el que tienen que resolver. La actividad cierra con la presentación de la solución de cada equipo. Para la solución y preparación de la presentación se sugiere se les ofrezca a los estudiantes material, hojas blancas, hojas cuadriculadas, transparencias, regla, transportador, compás, calculadoras, colores, plumones para transparencias, etc. Todo el material se pone al frente a disposición de los estudiantes y ellos seleccionan lo que necesitan.

En cuanto a la evaluación formativa, este estudio se basa en el trabajo de Black and Wiliam (1998), en el que analiza y describe las grandes ventajas y la fuerte necesidad de fortalecer la evaluación formativa en el aula ya que provee información específica acerca de la fortaleza y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Esta información es tan valiosa para los estudiantes como para los maestros. Los estudiantes tienen una retroalimentación inmediata de su aportación, esto es, esta evaluación les sirve para determinar procedimientos y conceptos que necesitan profundizar así como razonamientos que ajustar. Los maestros pueden usar esta información para adaptar su instrucción a las necesidades de los estudiantes.

METODOLOGÍA

En este estudio participaron 94 estudiantes inscritos en una sección del curso Cálculo para ingenieros ofrecido por una universidad del sur de los Estados Unidos. Este curso tenía una frecuencia de tres sesiones de clase expositiva (de

50 min.) impartidas por el profesor titular y dos sesiones opcionales de práctica (de 50 min.) guiadas por un asistente de docencia. Para la sesión de práctica la clase se dividía en tres grupos, por lo que se ofrecía en tres diferentes horarios.

La actividad de este estudio está basada en un modelo económico (Aliprantis y Carmona, 2003) el cual se puede resolver planteando un modelo cuadrático y se puede trabajar como un problema de optimización. Siete semanas antes de la implementación, se introdujo el concepto de derivada, se revisaron reglas de derivación, relación entre la gráfica de una función y su derivada, y aplicación de las derivadas (optimización); y tres semanas antes de la implementación los estudiantes habían sido evaluados en esos temas. Sin embargo, la implementación de la actividad se realizó cuando en la clase expositiva se trabajaba con el tema de integrales.

En esta actividad los estudiantes trabajaron en grupos colaborativos de cuatro a cinco miembros, dando un total de 23 grupos. Estos grupos se formaron aleatoriamente al momento de la actividad. Para facilitar el manejo de los grupos y favorecer la continuidad del trabajo, la actividad se implementó durante las dos sesiones de práctica de una semana. Los estudiantes trabajaron en el mismo grupo colaborativo durante las dos sesiones. Para los estudiantes esta actividad constituyó su primera experiencia con este tipo de actividades; el profesor ya tenía experiencia implementando estas actividades.

La actividad reveladora tenía tres partes, artículo y preguntas preliminares, solución del problema, y presentación. El artículo describe un hotel importante para cierta comunidad por el flujo económico que produce al atraer turistas. El problema consiste en ayudar al Sr. Graham a maximizar las ganancias de su hotel sabiendo que cuando el hotel está lleno el costo por habitación es de \$60 por cuarto con un gasto por servicio de mantenimiento de \$4 por cuarto, y que por cada dólar que se incrementa el costo por habitación, se ocupa un cuarto menos. Como parte de la solución se les pidió a los estudiantes que generalizaran su resultado de tal manera que el Sr. Graham pudiera aplicar el modelo propuesto aún y cuando el costo del cuarto, o el mantenimiento

hubieran cambiado. Para la presentación se contó con cámara de documentos y proyector de filminas.

La actividad se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera sesión los grupos leyeron el artículo, contestaron las preguntas preliminares y discutieron en sus grupos la solución. En el segundo día, concluyeron la documentación de su solución y presentaron a la clase sus resultados. El profesor motivó a los estudiantes a que hicieran preguntas al grupo que exponía.

La recolección de datos está constituida por el trabajo de cada pequeño grupo, y notas de las observaciones de los investigadores. Para el análisis se organizó el trabajo de cada pequeño grupo en un folder, y se clasificaron de acuerdo a la solución propuesta, lo que produjo tres grandes grupos con las tres soluciones numéricas posibles.

Para cada una de las tres soluciones numéricas encontradas se observó que provenían de diferentes modelos cuadráticos, o que presentaban diferentes estrategias de optimización, o generalizaciones. Por lo que se construyó una matriz en la que se concentró: equipo, definición de la variable empleada, modelo planteado, estrategia de optimización, tipos de representaciones empleadas (tabular, gráfica, etc.), y comentarios. De este análisis surgió la siguiente categorización:

- Definición de variables

n = número de cuartos vacantes

r = aumento en la tarifa por cuarto

x = número de cuartos ocupados

y = tarifa diaria por cuarto

- Modelo

I. Ganancia = $(80 - n)(60 - n) - 4(80 - n)$ o Ganancia = $(80 - r)(60 - r) - 4(80 - r)$

II. Ganancia = $xy - 4x$, $y = 140 - x$. Ganancia con respecto al número de cuartos ocupados.

III. Ganancia = $xy - 4x$ and $x = 140 - y$. Ganancia con respecto a la tarifa diaria por cuarto.

$$\text{IV. Ganancia} = (80 - (y - 60))y - 4(80 - (y - 60))$$

- Estrategia de optimización

D: Uso de la derivada para determinar el punto máximo.

G: Uso de una calculadora con capacidad de gráficas para determinar el punto máximo.

T: Uso sistemático de una tabla para calcular la ganancia.

V: Uso de la fórmula para calcular el vértice de una parábola, $x_v = \frac{-b}{2a}$, con función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

RESULTADOS

La tabla 1 resume el análisis de frecuencia de resultados considerando la definición de la variable, el modelo cuadrático planteado y al respuesta numérica encontrada. Tres de los 23 pequeños grupos presentaron dos diferentes acercamientos en su solución, por lo que se contabilizaron 26 respuestas. La respuesta numérica a la que se llega para cada definición de variable se incluye en la Tabla 1 para indicar que todos los equipos fueron consistentes en sus procedimientos y arribaron al valor de optimización del modelo propuesto.

Tabla 1. Frecuencia de uso de los equipos considerando la definición de variable, modelo planteado y respuesta numérica encontrada

Variable / Modelo / Respuesta	Frecuencia
$n / I / n = 12$	4
$r / I / r = 12$	7
$n = r / I / n = r = 12$	8
$x, y / II / x = 68$	3
$x, y / III / y = 72$	2
$y / IV / y = 72$	2
Total	26

El modelo I permite $n = r$ ya que el problema indica que el número de cuartos vacantes incrementa por cada dólar de aumento en la tarifa. Todos los equipos reconocieron esto, pero no todos establecieron esta relación explícitamente. Esto es particularmente importante al momento de interpretar la respuesta para obtener la optimización, justamente ahí es donde muchos de los equipos batallaron para reconocer el significado de 12, al grado de hacerlos dudar de su resultado por lo que tuvieron que regresar a la descripción del problema y darse cuenta que el incremento de una variable era el decremento de la otra.

Los modelos II y III plantean las relaciones (número de cuartos) + (tarifa diaria) = 140 y ganancia = (número de cuartos ocupados)(tarifa diaria) - 4 (número de cuartos ocupados). La diferencia entre estos modelos es la elección de la variable independiente (número de cuartos ocupados o tarifa diaria).

El modelo IV define a y como la tarifa diaria y hace uso de la misma relación de ganancia de los modelos II y III. Sólo que para escribir la función de ganancia con respecto a la tarifa diaria plantea que el número de cuartos ocupados está dado como el número total de cuartos menos el número de cuartos vacantes, esto es, $80 - (y - 60)$ ya que numéricamente el número de cuartos vacantes es el mismo que el aumento en la tarifa por cuarto.

Es relevante notar que la definición de la variable empleada está íntimamente ligada con el modelo planteado. La mayoría de los equipos declararon explícitamente el significado de las variables usadas. Esto se ve provocado por la manera en que está enunciado el problema, los equipos notaron la importancia de definir las variables en cuestión al momento de llegar a una respuesta y no saber cómo interpretarla.

Con respecto a las estrategias de optimización, 20 equipos obtuvieron la derivada para calcular el punto máximo, uno empleó una calculadora con capacidad de gráficas (TI-83), otro usó la fórmula del vértice de la parábola y un equipo completó una tabla en la que sistemáticamente fue disminuyendo en uno el número de cuartos ocupados e incrementado la tarifa diaria.

CONCLUSIONES O DISCUSIÓN

El hecho de que la mayoría de los equipos hayan seleccionado el modelo I con mayor frecuencia y que el método de optimización más recurrido haya sido el del cálculo de la derivada indica las ideas y modelos matemáticos que estos estudiantes tienen. Esta es una característica de las actividades reveladoras del pensamiento. Y es ahí donde la evaluación formativa se hace presente de una manera evidente tanto para maestros como para estudiantes, y desde luego para los investigadores.

Al trabajar colaborativamente, los estudiantes reciben retroalimentación de sus compañeros al participar en el intercambio de ideas y estrategias para resolver el problema. Al tratar de establecer una generalización, nuevamente se requiere de la aportación de todo el equipo para lograrlo, informando e instruyendo al estudiante sobre qué se debe considerar para lograr generalizar el modelo planteado. Al exponer su solución y estrategia de resolución, los estudiantes son los que llevan la pauta sobre el cuestionamiento a los equipos sobre las diferentes representaciones empleadas, consideraciones tomadas, resultados obtenidos, etc., fomenta la participación activa del estudiante.

Para el profesor estas actividades dan muestra de las ideas que manejan los estudiantes, al evidenciar las estrategias a las que recurren al resolver el problema. Esto le permite retomar ideas planteadas por los propios estudiantes para extenderlas a nuevos conceptos, o retomar ideas que no hayan quedado claras para fortalecerlas.

Aliprantis y Carmona (2003) reportan la aplicación de este mismo problema a estudiantes de primero de secundaria y encontraron que aunque no se tiene ganado la formalidad matemática para expresar los modelos empleados, las ideas matemáticas planteadas son igualmente valiosas. La estrategia más favorecida por los estudiantes de secundaria consistió en multiplicar la tarifa diaria por el número de cuartos ocupados y restarle el gasto por mantenimiento. Esta misma estrategia es la que emplearon los estudiantes de

cálculo, sólo que la expresaron con notación funcional en la que definieron las variables involucradas.

Haciendo un análisis de la actividad implementada en este estudio con respecto a los principios para el desarrollo de actividades reveladoras del pensamiento observamos que el principio de realidad ofrece una ventana más a la riqueza de este problema. La solución de la actividad del Hotel Histórico se resume en que el Sr. Graham necesita ocupar 68 cuartos del hotel con una tarifa diaria de \$72, lo que le daría una ganancia de \$4 mil 624. En la vida real, un administrador de un hotel no se conformaría con esta respuesta, ya que tendría 12 cuartos vacantes. Por lo que estos cuartos desocupados ofrecen una variedad de propuestas. Algunos de los estudiantes de cálculo propusieron que se rentaran estos cuartos a un menor costo para promocionar el hotel, o bien construir en algunos de ellos un cuarto de juegos que atraería a más turistas. Aunque este problema tiene una respuesta numérica única (ganancia de \$4 mil 624), ofrece una gran variedad de acercamientos, estrategias, y perspectivas que permite que todos los estudiantes participen y aporten a la problemática fortaleciendo así la importancia de las matemáticas en la vida diaria.

AGREDECIMIENTO

Este estudio fue realizado con el apoyo del grupo de investigación de la Dra. Guadalupe Carmona de la Universidad de Texas en Austin.

REFERENCIAS

- Aliprantis, C. D. y Carmona, G. (2003). "Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective", en R. Lesh y H. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Black, P. y Wiliam, D. (1998). "Assessment and classroom learning", *Assessment in Education*, 5(1), 7-73.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). "Foundations of models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving", en R. Lesh y H. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R.; Hoover, M.; Hole, B.; Kelly, E. y Post, T. (2000). "Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers", en A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-645). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Poyla, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University.

Sepúlveda, L. A.; Santos, T. L. M. y García, P. R. (Eds.) (2007). *Memorias. Primer Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Morelia: UMSNH.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Londres: Academic Press.