

DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y UTILIZANDO UNA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

MARTHA L. GARCÍA RODRÍGUEZ

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional

ALMA A. BENÍTEZ PÉREZ

Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos 11 "Wilfrido Massieu", Instituto Politécnico Nacional

RESUMEN: En el presente trabajo se analizan los resultados de un proyecto de investigación desarrollado en el IPN que tuvo como propósito analizar las competencias matemáticas desarrolladas por los estudiantes en un ambiente de resolución de problemas incorporando alguna herramienta computacional. Los problemas diseñados están relacionados con el concepto de variación, que es esencial para el estudio de diferentes fenómenos. El marco teórico utilizado para el análisis de los datos se refiere a las competencias matemáticas y a los niveles de manejo de estas competen-

cias por parte de los estudiantes. El proyecto se desarrolló siguiendo una metodología de tipo cualitativo. Los resultados de la investigación muestran que los estudiantes desarrollan diferentes competencias matemáticas aun cuando trabajan con las mismas actividades, y utilizan los conocimientos adquiridos en cursos previos para poner en acción heurísticas durante la resolución de los problemas.

PALABRAS CLAVE: Competencias, resolución de problemas, herramienta computacional, representación.

Introducción

Los antecedentes del término competencia, se encuentran en el programa para evaluar al estudiante internacional (PISA) desarrollado en 1977 por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Este término está relacionado con la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicarse con otros estudiantes en forma efectiva, así como resolver e interpretar problemas en una amplia variedad de áreas (OCDE, 2005). Se considera que desarrollar una competencia es más complejo que desarrollar un conocimiento o habilidad porque implica poner en juego el manejo de recursos sicosociales en un contexto particular. Las competencias se manifiestan cuando un sujeto realiza una tarea en la que pone en juego sus conocimientos, habilidades, actitudes y valores para llevarla a cabo.

De la revisión de la literatura (OCDE, 2005), es posible identificar competencias básicas en tres grandes categorías:

Categoría 1. Los individuos necesitan utilizar un amplio rango de herramientas para actuar efectivamente con el ambiente; unas físicas como alguna tecnología de información y comunicación (TIC); otras socioculturales como el lenguaje (p.10).

Categoría 2. Los individuos deben ser capaces de relacionarse con otros, para poder interactuar con grupos heterogéneos (p.12).

Categoría 3. Los individuos deben adaptarse a su vida, adaptándose al contexto social pero actuando en forma autónoma (p.14).

En el marco de las propuestas realizadas por la Unión Europea se identifican ocho competencias básicas que se incluyen en las tres categorías anteriores:

- Competencias en comunicación lingüística
- Competencias Matemáticas
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
- Tratamiento de la información y competencia digital
- Competencia social y ciudadana
- Competencia cultural y artística
- Competencia para aprender a aprender
- Autonomía e iniciativa personal

En este trabajo se hará referencia a las competencias matemáticas que se refieren a la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que tienen las matemáticas en el mundo, hacer juicios fundamentados y emplear las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (ISEI-IVEI, 2004). De acuerdo con los resultados del estudio PISA de 2003, el conocimiento de las matemáticas implica el desarrollo de las siguientes competencias: a) pensar y razonar; b) argumentar; c) comunicar; d) modelar; e)

plantear y resolver problemas; f) representar y, g) utilizar el lenguaje simbólico, formal, técnico y las operaciones definidas en este lenguaje y h) utilizar las TIC (ISEI-IVEI, 2004).

Las ideas anteriores son los antecedentes de un proyecto desarrollado en el IPN que tuvo como objetivo: proponer una estrategia didáctica para el desarrollo de las competencias matemáticas mencionadas en el párrafo anterior. En particular, en este documento se analizan las competencias matemáticas desarrolladas por los estudiantes durante una de las actividades.

Referentes Teóricos

En el proyecto PISA se establecen seis niveles de manejo de competencias que se ponen en acción durante la resolución de problemas matemáticos y que fueron considerados para el análisis de los datos del proyecto (INECSE, 2005, p. 5).

Primer nivel: Los alumnos identifican la información y efectúan procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas.

Segundo nivel: Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que exigen una deducción directa y utilizan una sola representación.

Tercer nivel: Los alumnos saben ejecutar los procedimientos descritos; son capaces de aplicar estrategias simples de resolución de problemas; pueden utilizar e interpretar información de diferentes representaciones; y extraer conclusiones directas de ellas y exponen en forma escrita y breve sus interpretaciones resultados y razonamientos.

Cuarto nivel: los alumnos trabajan en forma efectiva con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que exigen que se realicen suposiciones; son capaces de seleccionar e integrar diferentes representaciones incluyendo las simbólicas y relacionarlas con las características del mundo real y son capaces de elaborar y transmitir sus explicaciones y argumentaciones.

Quinto nivel: los alumnos desarrollan y trabajan con modelos en situaciones complejas identificando condiciones y estableciendo suposiciones; son capaces de comparar y valorar estrategias de resolución de problemas; utilizan formas de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, relacionan las representaciones en forma adecuada y son capaces de reflexionar sobre sus acciones.

Sexto nivel: los alumnos forman conceptos, generalizan y utilizan la información durante la resolución de problemas; relacionan representaciones y diferentes fuentes de información de una manera flexible; poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado; utilizan su razonamiento junto con el dominio de las relaciones y operaciones matemáticas simbólicas y formales para generar nuevas estrategias ante situaciones nuevas y formulan y transmiten de manera precisa sus reflexiones, interpretaciones y argumentos y su adecuación a las situaciones nuevas (p. 5).

Los niveles quinto y sexto corresponden a un pensamiento más abstracto en los estudiantes, caracterizado por: la generación de modelos, la comparación y valoración de heurísticas en la resolución de los problemas, la relación entre diferentes representaciones y la comunicación de sus resultados utilizando operaciones matemáticas simbólicas en sus procesos de argumentación.

En particular para la generación de un modelo matemático resulta esencial que los estudiantes establezcan relaciones entre las variables del problema (relaciones funcionales), y exploren la variación de la función propuesta, esta actividad se puede efectuar al trabajar con diferentes representaciones: tabular, algebraica y gráfica de la función. Emplear diferentes representaciones es útil para identificar y explorar conjeturas o relaciones entre las variables del problema, buscar argumentos matemáticos que las sustenten, y eventualmente desarrollar formas eficientes para comunicar los resultados (Santos, 2007).

Las representaciones utilizadas por los estudiantes y las relaciones que establecen entre ellas son elementos de análisis para conocer el tipo de razonamiento que desarrollan; se considera que el razonamiento de los estudiantes, está relacionado directamente con la representación empleada y que al hacer uso de varias representaciones se desarrolla una comprensión más completa de un concepto (García & Benítez, 2011; Parnafes & Disessa, 2004).

Sujetos, Métodos y Procedimientos

Para obtener información de las competencias matemáticas desarrolladas por los estudiantes se analiza el trabajo de los mismos durante las actividades diseñadas y en este documento se analiza una de ellas. En la implementación de las actividades se generó dentro del aula un ambiente que propiciara la discusión de ideas matemáticas y la validación de razonamientos y conjeturas. En este escenario el papel del profesor fue recabar

datos para documentar y, posteriormente, analizar el trabajo de cada estudiante en este proceso. Se consideró que una metodología pertinente para llevar a cabo la investigación debía ubicarse en un paradigma de investigación cualitativo en el que se asume una construcción social del significado de los conceptos:

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

- a) Reportes escritos elaborados en forma individual.
- b) Reportes escritos elaborados por cada pareja de estudiantes.
- c) Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.
- d) Grabaciones en video del trabajo de los estudiantes.
- e) Reportes elaborados por el profesor-investigador.
- f) Archivos de Excel guardados en discos flexibles elaborados por los estudiantes en forma individual y en pareja.

Actividad. Interés compuesto

En las instituciones bancarias anuncian que el interés que pagan a un cliente se aplica diariamente, por hora e incluso por minuto o fracción de minuto. Cuando esto ocurre, se dice que el interés se compone o capitaliza continuamente.

Si Q_0 es la cantidad inicial de dinero; α es el interés generado en un periodo y Q_n es la cantidad de dinero acumulada en una cuenta de ahorros después de n periodos. Determina un modelo para calcular la cantidad de dinero acumulada al final de n periodos.

Análisis de datos

La actividad que se reporta en este documento se llevó a cabo durante dos sesiones de una hora y treinta minutos cada una, en la primera sesión los estudiantes iniciaron la exploración de la actividad y el análisis de la información; en la segunda los estudiantes explicaron los modelos generados y comunicaron a sus compañeros sus resultados justificando sus procedimientos. Se realizó un análisis detallado de los reportes escritos, de los videos y de las entrevistas que proporcionó elementos para conocer acerca de los procesos de construcción de relaciones entre representaciones que siguieron los estudiantes

para establecer relaciones entre las variables presentes en el problema y la forma en que desarrollaron un modelo matemático que representara la relación. Las acciones de los estudiantes fueron seguidas con cuidado, otorgando especial atención al manejo de las representaciones.

Después de analizar los datos, los estudiantes fueron clasificados en dos categorías de acuerdo con las competencias identificadas en su trabajo. Cada categoría será representada y ejemplificada con el trabajo de una pareja de estudiantes.

Competencias matemáticas identificadas en el trabajo de Edgar y Luis

El trabajo de Edgar y Luis analizará en tres etapas, en cada una de ellas se identifican competencias incluidas en alguno de los seis niveles de manejo de competencias.

En la primera etapa se identifican algunas competencias incluidas en el primero y segundo niveles de manejo de competencias

- Edgar y Luis partieron de un caso particular proponiendo una cantidad inicial de \$1000 y un interés del 12% anual.
- Iniciaron su trabajo considerando una variación proporcional directa, tema conocido por los estudiantes desde la educación básica. Calcularon el 12% de 1000 que es \$120, multiplicaron esta cantidad por el número de periodos transcurridos y lo sumaron a la cantidad inicial.

En la segunda etapa se identifican algunas competencias incluidas en el tercer y cuarto niveles de manejo de competencias.

- Después de observar el trabajo de otro compañero de clase, Edgar y Luis modificaron su concepción original (variación proporcional) y ensayaron con diferentes relaciones entre las variables presentes en el problema.
- Realizaron la exploración de distintas relaciones entre las variables del problema utilizando como herramienta una hoja electrónica de cálculo Tablas 2 y 3.

Tabla 2. Elaborada por Edgar y Luis con Excel	Tabla 3. Elaborada por Edgar y Luis con Excel
$=(1000*12%)*(C13)+1000$	$=(2300*11%)*(F12)+2300$
$=(1000*12%)*(C14)+1000$	$=(H12*11%)*(F13)+H12$

- En la Tabla 3 Edgar y Luis ya incluyeron un procedimiento recursivo: utilizan la cantidad acumulada en un periodo anterior (H_{i-1}) para obtener la cantidad acumulada en el periodo siguiente. Sin embargo, calculan en forma incorrecta el monto del interés generado debido a que incluyen dos veces el número de periodos de inversión en el cálculo.

En la tercera etapa se identifican algunas competencias incluidas en el quinto y sexto niveles de manejo de competencias.

- Edgar y Luis corrigieron en su reporte escrito el error de incluir dos veces el número de periodos.
- Con una inversión inicial $Q_0 = 1000$ y un interés $\alpha = 9.5$ efectuaron los cálculos que se muestran en la Fig. 1.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \text{en un año igual a } 1095 \\
 \text{Por 2 años} \\
 Q_1 &= \frac{\alpha Q_0}{100} + Q_0 \\
 Q_2 &= \frac{\alpha (1095)}{100} + 1095 = 119.025
 \end{aligned}$$

Fig. 1 Trabajo escrito por Edgar y Luis

En esta etapa se puede considerar que Edgar y Luis habían comprendido el problema y asumido que la función que modelaba la actividad no podía ser lineal y trabajaron para determinar una expresión que permitiera calcular la cantidad Q_n después de n periodos sin utilizar el resultado anterior (Fig. 2).

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \text{Cantidad inicial} \\
 \alpha &= \text{interés en porcentaje} \\
 Q_n &= \text{Cantidad Acumulada} \\
 Q_1 &= \alpha Q_0 + Q_0 \\
 Q_2 &= \alpha Q_1 + Q_1 \\
 Q_3 &= \alpha Q_2 + Q_2 \\
 Q_3 &= \alpha Q_3 + Q_3
 \end{aligned}$$

Fig. 2 Trabajo final de Edgar y Luis.

Competencias matemáticas identificadas en el trabajo de Carlos y David

El trabajo de Carlos y David se analizará en tres etapas, en cada una de ellas se identifican competencias incluidas en alguno de los seis niveles de manejo de competencias.

En la primera etapa se identifican algunas competencias incluidas en el primer, segundo y tercer niveles de manejo de competencias matemáticas

- Carlos y David iniciaron su trabajo considerando un caso particular; una cantidad inicial de \$2500, un interés de 12% y un periodo de un año. Con estos datos calcularon la cantidad acumulada Q_n , multiplicando 2500 por 0.12. Carlos señaló que debía sumar \$300 con los \$2500 para obtener un total de \$2800.
- Analizaron el significado de que la cantidad inicial fuera fija, idea que los llevo a estudiar la variación de la función que propusieron. El siguiente fragmento muestra parte del análisis de Carlos y David.

Carlos: Si al año se generan \$300, el año se divide en 12 meses, entonces serían 300 entre 12. ¿Cada mes nos va a generar \$25?

Carlos: Yo creo que también varía.

David agregó: Porque va sumando, es lo que te decía. Por ejemplo si invierto \$1000 y en 15 días se forman 50 centavos, el siguiente porcentaje se va a hacer sobre 1000 con 50 centavos.

Carlos: Para ser más precisos y saber cuánto se genera, hay que irse a más... más, fracciones de tiempo.

En su primer reporte Carlos y David escribieron una fórmula para calcular la cantidad acumulada en el primer periodo, aunque mostraron problemas con la notación utilizada para representar la cantidad acumulada en cada periodo (Fig. 3).

Handwritten work on grid paper:

- 2500
- $\alpha = n$
- $I = \text{interés}$
- $\alpha = 12\%$
- $(2500)\left(\frac{\alpha}{100}\right) = \text{interés}$
- $(2500)(12\%) = 300 \text{ de interés}$
- $(2500)(12\%) + (2500) = Q_n = 2800$
- $(Q_0)\left(\frac{\alpha}{100}\right) + Q_0 = Q_n$

Fig.3 Primera fórmula propuesta por Carlos y David

En la segunda etapa se identifican algunas competencias incluidas en el cuarto y quinto niveles de manejo de competencias matemáticas.

- Utilizando la primera fórmula elaboraron una tabla con la hoja electrónica de cálculo para determinar la cantidad acumulada después de 13 periodos (Fig. 4).

= =D14+C14			
B	C	D	E
Interes	Cantidad Inicial	Interes generados	Cantidad Acumulada
	2500	300	2800
	2800	336	3136
	3136	376.32	3512.32
	3512.32	421.4784	3933.7984
	3933.7984	472.055808	4405.854208
	4405.854208	528.702505	4934.556713
12%	4934.556713	592.1468056	5526.703519
	5526.703519	663.2044222	6189.907941
	6189.907941	742.7889529	6932.696894
	6932.696894	831.9236272	7764.620521
	7764.620521	931.7544625	8696.374983
	8696.374983	1043.564998	9739.939981
	9739.939981	1168.792798	10908.73278

Fig. 4 Tabla elaborada por Carlos y David

- Al analizar la tabla se identifica un procedimiento recursivo. Con la sintaxis de la hoja electrónica de cálculo $E14=C14+D14$ donde D14 correspondía al interés generado a partir de la cantidad acumulada en ese periodo anterior.

En la tercera etapa se identifican algunas competencias incluidas en el cuarto y quinto y sexto niveles de manejo de competencias matemáticas.

- Carlos y David calcularon la cantidad acumulada durante tres periodos Fig. 5.

$\alpha = 10\%$
 $Q_0 = 1000$
 $Q_n = \text{Total}$
 $nP = 3, 2, 1, \text{etc.}$

Este dato es muy importante

Periodos <	1	\$ 1100	1210	← El 2 depende del 1 periodo
	2	\$ 1210	1331	← El 3 depende del 2 periodo
	3	\$ 1331	1464.1	←

Fig. 5 Trabajo de Carlos y David

- Carlos explicó a todo el grupo el trabajo que habían realizado enfatizando la importancia de que un resultado dependiera de otro.

Carlos: Lo que yo me di cuenta es que la cantidad de dinero que vas a ganar se incrementa constantemente dentro del periodo, si ustedes se van hasta segundos.

Carlos: Yo calculé el número de periodos hasta el 6 y me di cuenta, no sé...es como tener 3, 3 por 3, 3 por 3 por 3 y así.

Carlos consideró que lo importante era la cantidad inicial y el proceso recursivo. Al parecer esto le permitió considerar la posibilidad de utilizar un exponente en la expresión que había obtenido inicialmente aun cuando no llegó a la expresión para obtener la cantidad acumulada después de n periodos.

Discusión

De los resultados presentados en este documento es posible inferir que los estudiantes desarrollan diferentes competencias aun cuando trabajan con la misma actividad. Más aún, no es posible identificar todas las competencias incluidas en cada nivel, en el trabajo de los estudiantes.

En el trabajo de los estudiantes se identificaron competencias incluidas en los seis niveles: a) el trabajo de los estudiantes se caracterizó por el análisis de la información proporcionada en el problema, utilizar procedimientos conocidos (considerar variación proporcional) y se identificó el empleo de una representación numérica; b) utilizaron e interpretaron la información subyacente en las representaciones numérica y simbólica; realizaron conjeturas, las verificaron y expusieron en forma oral sus resultados y razonamientos; c) propusieron funciones para modelar el problema y efectuaron un análisis global de su comportamiento; llevaron a cabo la comparación y valoración de sus heurísticas en la resolución del problemas, relacionaron diferentes representaciones y comunicaron sus resultados utilizando operaciones matemáticas en sus procesos de argumentación.

En el trabajo de los estudiantes también se identificó la noción de variación directamente proporcional como una estrategia utilizada en sus exploraciones iniciales.

Los resultados obtenidos son importantes debido a que permiten conocer la forma en que los estudiantes desarrollan competencias matemáticas a través de actividades de resolu-

ción de problemas incorporando alguna herramienta computacional, lo que puede contribuir para el diseño de actividades que desarrollen competencias matemáticas particulares. No obstante, es necesario realizar investigaciones longitudinales que brinden mayor información de estos aspectos.

Referencias

- García, M. y Benítez, A. (2011). Competencias matemáticas desarrolladas en ambientes virtuales de aprendizaje: el caso de MOODLE. *Formación Universitaria*, Vol. 4, 3, Chile. (En prensa).
- Construcción del concepto de variación con apoyo de una herramienta computacional, *Innovación Educativa*, Vol. 9, 48, México (2009).
- INECSE Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo de España (2005). Informe PISA 2003, Pruebas de matemáticas y de solución de problemas, Madrid, Santillana, <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/Portal/WebICEC/docs/0809/PISA/pisa2003liberados.pdf>
- ISEI-IVEI Instituto Vasco de Evaluación e Investigación Educativa (2004). Primer Informe de la Evaluación PISA 2003, <http://www.isei-ivei.net/cast/pub/PISA2003euskadic1.pdf>
- OECD Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2005). *Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*, http://www.oecd.org/document/17/0,3343,en_2649_39263238_2669073_1_1_1_1,00.html
- Parnafes, O. y Disessa, A., (2004). Relations between types of reasoning and computational representations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Kluwer Academic Publishers: Netherlands, 9: 251–280.
- Santos, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *Mathematics Education*, 39, 523-536.

Agradecimientos

Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] para realizar y presentar este artículo. Las investigaciones con números de registro 20100678 y 20100459 han sido apoyadas por la SIP del IPN.