

LA IMPORTANCIA DE LA REPRESENTACIÓN GENERATRIZ EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS.

ALMA ALICIA BENÍTEZ PÉREZ/MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ
CECyT 11, Instituto Politécnico Nacional, ESIME-Zacatenco

RESUMEN: El aprendizaje de la matemática se alcanza cuando el alumno tiene interés y disposición para participar en tareas pertenecientes al quehacer matemático, siendo indispensable presentar al alumno diversos contextos en los que pueda hacer uso de diversas representaciones que le permitan examinar soluciones y relaciones. En este sentido, la Primera Representación (Representación Generatriz) retoma un papel importante entre la percepción del problema y el proceso de solución. El presente trabajo plantea la posibilidad de impulsar la solución de problemas como una estrategia para promover habilidades

y destrezas, lo que permite modificar la representación generatriz en problemas contextualizados. Los hallazgos muestran el anclaje de algunos estudiantes en la representación generatriz y para otros el uso de diferentes tratamientos para modificar la primera representación. El estudio se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo, privilegiando los alcances descriptivos y exploratorios.

Palabras clave: Representación Generatriz, Representaciones, Resolución de Problemas.

Introducción

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los programas de los CECyT's (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos) del área Físico- Matemáticas, mencionan la importancia de promover las habilidades del pensamiento tales como: análisis, interpretación y síntesis, así como perceptuales, comunicación y de elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización. En este proceso las representaciones adquieren un papel importante, pues de ellas depende la estructura cognitiva del estudiante. El uso de las representaciones permite dinamizar el proceso de la resolución de problemas en matemáticas, otorgando al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Particularmente, la representación generatriz es la primera representación con la

cual se inicia el proceso de solución decisiva, ya que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución, durante el cual influyen varios aspectos como son: la formulación del problema, las ideas previas del estudiante, las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso (referido en términos de la comunicación), etc. Factores que son determinantes para que el estudiante pueda re-interpretar o modificar la primera representación, cuyo tratamiento conlleva a identificar información para hacer inferencias y seleccionar los elementos relevantes que posteriormente se traducirán en la abstracción del análisis de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y a la conclusión del problema.

En éste orden de ideas, la primera representación tendrá un acompañamiento de representaciones diseñadas con la misma finalidad del proceso, por ejemplo, ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones gráficas diseñadas en el curso de la solución del problema está determinado por el primer acercamiento con la situación problemática a través de la representación generatriz.

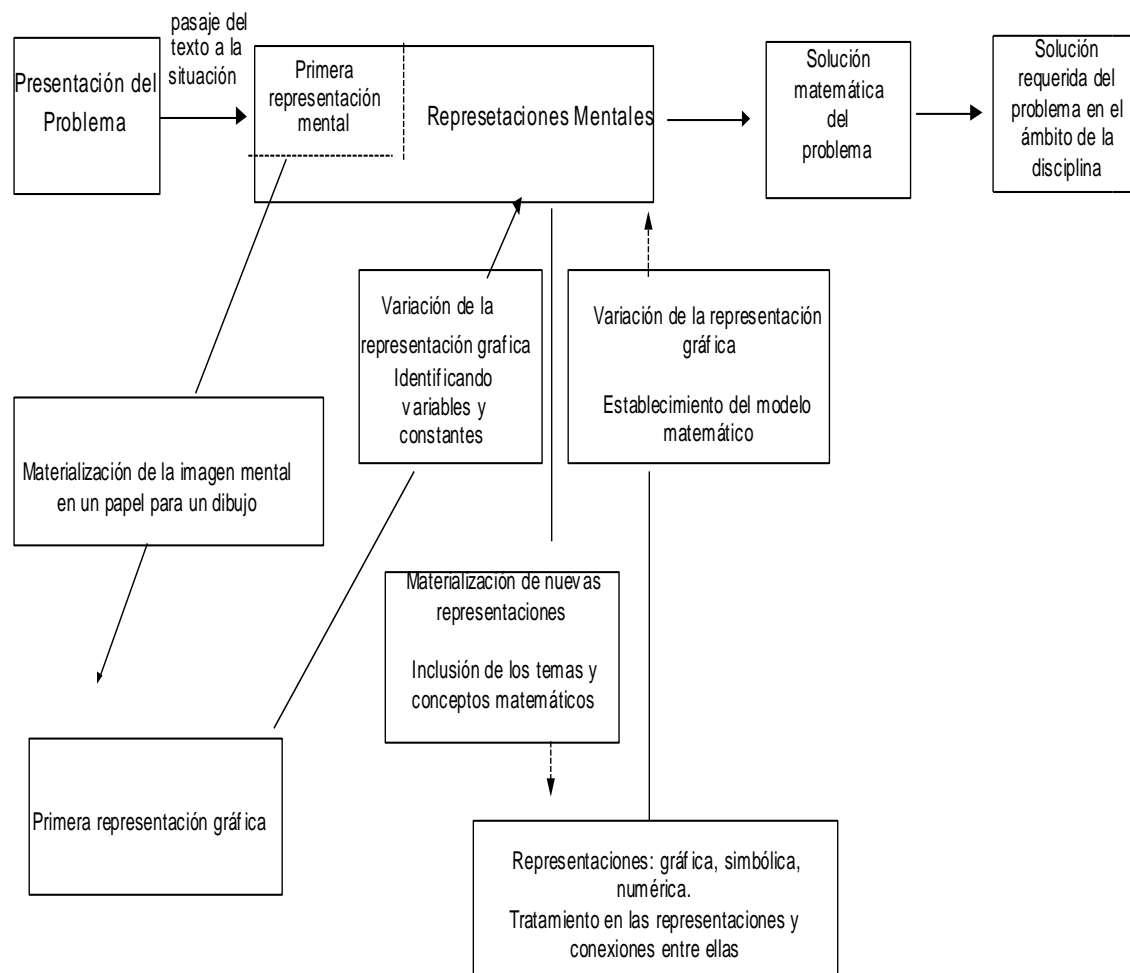
La presente investigación tiene como propósito analizar las estrategias que el alumno desarrolla, cuando se impulsan actividades que enfatizan el planteamiento de preguntas y la resolución de problemas en contexto, para favorecer la re-interpretación o modificación de la primera representación, en un ambiente dinámico, originando reflexiones individuales de resolución, así como discusiones grupales.

Marco teórico

Diversas investigaciones han expuesto la necesidad de explorar el uso de las representaciones por parte del alumno y la relevancia como herramienta cognitiva en la resolución de problemas (DeBellis y Goldin, 2006). Además, las múltiples representaciones pueden ser utilizadas para desarrollar de manera más profunda y reflexible la comprensión de conceptos y procesos (Cuoco y Curcio, 2001). Si bien, es necesario considerar varias representaciones en un concepto, la sola existencia de ésta actividad no es suficiente reflexionar sobre el uso del concepto en el problema, siendo necesario que las representaciones estén vinculadas y por lo consiguiente articuladas:

“uno necesita tener la posibilidad de cambiar de una representación a otra, cuando la otra sea más eficiente para el nuevo paso que queremos dar” (Dreyfus, 1991).

La elección de las representaciones apropiadas por parte de los estudiantes les brindará la oportunidad de aprender a sopesar las ventajas y desventajas de las diferentes formas de representación (Duval, 2006), y a emplear diversas herramientas que contribuyan en la resolución de problemas, de tal manera que el acompañamiento de las representaciones gráficas diseñadas en el curso de la reformulación de problema está determinado por la primera representación generatriz (Callejo, 1994, Benítez, 2009). El cuadro 1 muestra el análisis de la primera representación gráfica en eventos contextualizados.



Cuadro 1. Análisis de la Primera Representación Gráfica (Benítez, 2009)

En este sentido, Callejo (1994) expone la influencia de la “Rigidez Perceptiva”, durante el proceso de la resolución de problemas, al respecto, la autora considera que la rigidez perceptiva es debida a la presentación del problema, en cuanto a su formulación, es decir, en forma de texto, vocablos, gráficos etc., y por las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso. Por otra parte, la rigidez perceptiva está influenciada por las dificultades para re-interpretar o modificar la primera representación, mencionando algunas estrategias para re-interpretar representación generatriz, estas son: el cambio de estrategia de resolución frente a un obstáculo, reformulación del problema y las preferencias personales por ciertos métodos.

Otro aspecto que no debe ser soslayado es la razón por la cual la representación es un aspecto determinante en el proceso del aprendizaje; primero porque beneficia la comunicación y segundo porque permite el desarrollo de tratamientos, los cuales consisten en transformar la representación, dentro del mismo sistema, sobre la base de reglas propias para obtener otras representaciones que puedan constituir aportes diferentes de la representación inicial (Duval, 2006).

Problemas contextualizados

La importancia que reviste actualmente el término “Contexto” en el aprendizaje de la matemática, es debido al desarrollo de las competencias de los alumnos para aplicar las matemáticas escolares a los contextos extra matemáticos de la vida real, ya que consiste en entender con más detalles el entorno de la situación, considerando el importante papel que adquiere el contexto entre un objeto matemático y la práctica en la que dicho objeto es determinante.

Para las situaciones extra matemáticas, que contextualizan un objeto matemático los “Problemas contextualizados” permiten simular situaciones del mundo real. Las investigaciones sobre los problemas contextualizados, que atienden el aspecto sociocultural, muestran la enorme diferencia que hay entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que realizan en su vida cotidiana (Jurdak y Shahin, 2001; Díez, 2004). Las situaciones de la vida real donde los alumnos se encuentran involucrados, se ha observado el empleo de un tipo especial de matemáticas, ajenas a las que estudiaron en la escuela (Díez, 2004). En general, las investigaciones muestran que

en situaciones contextualizadas el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitivamente, emocional y socialmente.

Metodología

El estudio se enmarca en el paradigma de investigación cualitativa, privilegiando los alcances descriptivos y exploratorios. El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones contextualizadas para construir la representación generatriz, cuando inicia la interpretación y el análisis de la situación, así como el tratamiento en las subsecuentes representaciones para enriquecer la representación generatriz o bien para re-interpretar su contenido.

Contexto del grupo participante.- La actividad se realizó en el contexto de un curso de Álgebra con un grupo de 45 alumnos (1IM6), del nivel medio superior (C.E.C.yT. 11, “Wilfrido Massieu”) y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años.

Desarrollo de la Experiencia Educativa

1. Fase de introducción. Los alumnos participantes no contaban con antecedentes para llevar a cabo la dinámica en el aula, considerando que los alumnos estaban habituados a una enseñanza magistral. La dinámica a desarrollar en el aula fue a través de trabajo en equipo y discusión en el grupo, teniendo el profesor el papel de coordinador del proceso.

2. Fase de desarrollo. La clase se organizó en equipos de 4-6 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. Esta dinámica fue implementada durante todo el curso.

Para el diseño de las actividades, previamente se realizó un análisis del contenido matemático. El propósito fue identificar las ideas principales a desarrollar en el aprendizaje, las ideas centrales que articulan toda la organización conceptual de álgebra son las

transformaciones elementales de expresiones tanto algebraicas y gráficas, así como la traducción de lenguaje verbal al lenguaje algebraico y viceversa. Estas ideas fueron el apoyo para elaborar las experiencias de aprendizaje que se utilizaron durante la experiencia. La tarea del estudiante fue realizar la descripción de la situación para reformular problemas y dar seguimiento, la información se presentó en diversos contextos: tabla, gráfica, enunciados verbales, para explorar contenidos y establecer conexiones. A continuación se muestra una de las Actividades desarrolladas:

Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió, disgustada, que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que corrió a la biblioteca, cogió su cuaderno y, corriendo también, regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su muy probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bien amado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de clases de Valentina en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó, en total, 9 minutos.

a) *Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.*

b) *Todos hemos escuchado, o hecho, descripciones de objetos en movimiento, que incluyen expresiones como «detenido», «rápido», «lento», «más rápido», «disminuyó su velocidad», «más alejado», «aceleró más» y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria. Identifica en la gráfica algunas partes con estas expresiones y describe las características de la gráfica que les corresponden.*

Discusión del trabajo

Los elementos que guiaron el análisis son:

- Documentar las diferentes etapas que el alumno emplea cuando construye y modifica la representación generatriz.

- Identificar las diferentes representaciones y el tratamiento que emplea para modificar la representación generatriz.

La primera etapa está referida en una fase de apropiación en la cual, el alumno atiende aspectos que son parciales, aunque relevantes, ya que inicia construyendo preguntas parciales a la situación.

En una segunda etapa construye la representación pictórica, la cual opera y modifica a través de la discusión con sus compañeros, lo que permite reexaminar la situación para establecer nuevas preguntas (ver figura 1)

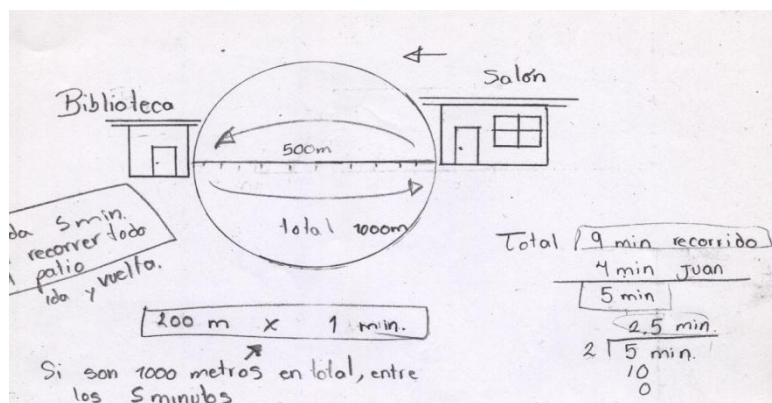


Figura 1. Representación pictórica de la Situación

La tercera etapa, se presenta cuando el estudiante establece conexiones con la información ya identificada y la formulación de nuevos eventos en la situación. Durante esta dinámica, el alumno determina cuatro desplazamientos que realiza Valentina en línea recta e identifica que el problema tiene cuatro posibles soluciones, ya que el punto de encuentro no está determinado en el planteamiento del problema, los cuales son: cuando se encuentra con Juan en el camino a la biblioteca, de regreso del salón de clase, al salir de clases y en la biblioteca (ver figura 2). El encuentro se puede dar en cualquiera de los tiempos $t=0$ y $t=5$, ya que si lo encuentra después no puede permanecer con Juan porque regresa en $t=9$.

Camino a la biblioteca.	De regreso del salón de clase.	En el salón de clases.	En la biblioteca.
-------------------------	--------------------------------	------------------------	-------------------

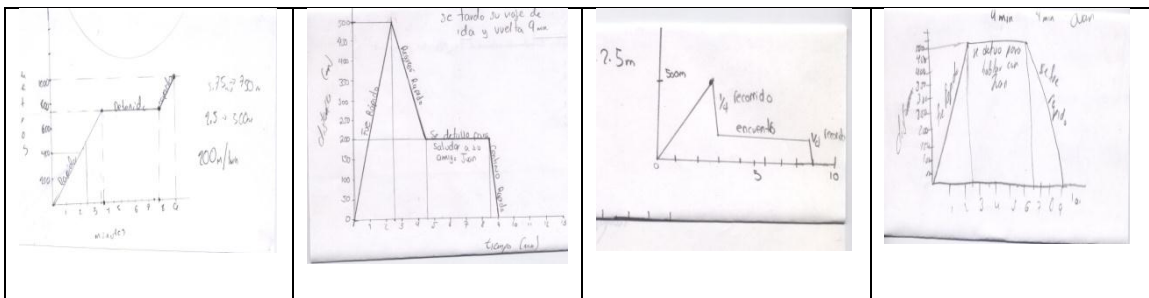


Figura 2. Re-interpretación de la Representación Generatriz

En términos generales, los alumnos identificaron información parcial de la situación, aunque se debe hacer notar que durante el análisis de la posición de Valentina y su encuentro con Juan, se identificó información relativa a sus posiciones respecto al tiempo transcurrido cuando se les cuestionó la relación del tiempo recorrido en los diferentes momentos de la trayectoria que realiza Valentina. A continuación se expone la explicación que un equipo emite para justificar la posición del encuentro con Juan de regreso de salón de clases.

A.J. Valentina olvidó el libro en la biblioteca así que tiene que ir corriendo antes de que inicie su clase de música ella se encuentra en el salón, como ya nos mencionaba el problema el diámetro del patio son 500m, como Valentina recorrerá ida y vuelta en total la distancia que correrá serán 1000 m y esos 1000 m los recorre en un total de 9 min, pero hay que tomar en cuenta que 4 min de ese tiempo los pasa con Juan, se llega a que los 1000 m los recorre en un total de 5 min.

Los alumnos analizaron el enunciado, para generar representaciones gráficas, las cuales representan el recorrido de Valentina en intervalos de tiempo de la biblioteca al salón de clases, y plantearon un primer problema ¿cómo determinar la velocidad que experimenta la trayectoria de Valentina?

Cuarta Etapa: Al intervenir el profesor, los alumnos identifican nueva información, lo que les permitió reformular el problema nuevamente. Los alumnos continuaron explorando la representación gráfica, en este punto se consideró que el problema planteado aún estaba vago e impreciso, lo que originó que el profesor presionará a los alumnos para replantear la situación.

Aunque la información fue relevante para la situación, los alumnos no establecen un relación para mostrar la condición del problema que aborda la disminución de su velocidad, alejamiento, aceleración (ver Fig.3).

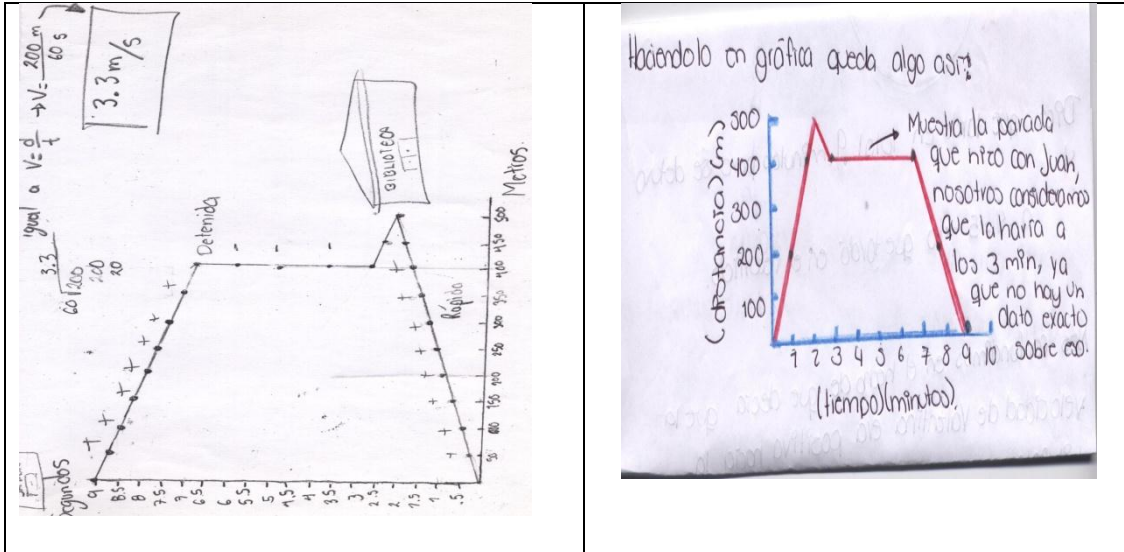


Figura 3. Representación de la velocidad en la situación

Se identifica nueva información en la situación, lo que trae consigo la necesidad de que el problema original deba ser revisado. No obstante, los estudiantes no lo hacen de manera espontánea y siguen manteniendo el problema planteado originalmente. A pesar de haber identificado nueva información, no la usan para reexaminar el problema inicial. La nueva información no es conectada con la información previamente identificada. El cambio de perspectiva en los estudiantes se produce por el interrogatorio del docente y por la interacción con las tareas. Ambos elementos propician que los alumnos se den cuenta que la nueva información ocasiona la modificación del problema original.

La estrategia de la formulación parece estar ligado con el seguimiento el problema. Se aprecia cuando el alumno está manipulando las diferentes posiciones dentro de la situación y explica las posiciones de acuerdo al recorrido realizado por Valentina. El proceso de formulación de problemas muestra una complejidad pues surgen dificultades o concepciones falsas que obstaculizan la formulación del problema. El cambio de la percepción de la situación de nuevos aspectos no trae consigo de manera inmediata un cambio. Durante la misma interacción es posible superar las dificultades que se presentan.

Respecto al segundo elemento de análisis; Identificar las diferentes representaciones y el tratamiento que emplea para modificar la representación generatriz, se expone los momentos e indicadores que se identificaron durante la experiencia.

Momentos	Indicadores
Representaciones Mentales. (Descripción del problema)	<ul style="list-style-type: none"> • Lectura en voz alta el texto.
	<ul style="list-style-type: none"> • Los alumnos leen el texto en voz baja.
	<ul style="list-style-type: none"> • El estudiante expone el problema con su lenguaje natural.
Representación Pictórica (Opera y modifica la representación)	<ul style="list-style-type: none"> • Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.
	<ul style="list-style-type: none"> • Opera con la representación
	<ul style="list-style-type: none"> • Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.
	<ul style="list-style-type: none"> • Expone la representación a través de diferentes movimientos.
Representaciones Simbólicas (Modifica representaciones simbólicas)	<ul style="list-style-type: none"> • Expone una expresión simbólica identificando las variables.
	<ul style="list-style-type: none"> • Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.
	<ul style="list-style-type: none"> • Modifica o elimina la expresión simbólica
	<ul style="list-style-type: none"> • . Justifica su expresión simbólica

<p>Establecer conexiones entre la representación verbal y la representación Pictórica. (Conexiones entre la representación pictórica con una representación verbal).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.
	<ul style="list-style-type: none"> • Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.
	<ul style="list-style-type: none"> • Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica,
	<ul style="list-style-type: none"> • representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.
<p>Establecer conexiones entre la representación pictográfica y la representación simbólica.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Formula una expresión desde una representación pictórica.
	<ul style="list-style-type: none"> • Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica
	<ul style="list-style-type: none"> • Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.
	<ul style="list-style-type: none"> • Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica.

Conclusiones

Durante la experiencia se presentó la Rigidez Perceptiva en el uso de una representación, así como falsas concepciones.

La variabilidad en la interacción. Ante una situación los estudiantes atienden diferentes aspectos, pero dejan de lado información valiosa. Por otro lado las preguntas que se plantearon reflejan dicha percepción.

Durante el proceso de formulación del problema, aparece entrelazado el seguimiento, es decir, surge una idea o una conjetura. Otro factor es el lenguaje utilizado por los alumnos, muestran notables deficiencias para expresar las ideas que van emergiendo en el proceso de formulación.

El empleo de múltiples representaciones permitió a algunos alumnos replantear la situación identificando información relevante que les permitió enriquecer la representación generatriz.

Referencias

- Benítez, A. (2009). Estudio de la Primera Representación Gráfica de las Ecuaciones Algebraicas en Contexto. *Innovación Educativa* 9 (1), 41-50.
- Callejo, M. (1994). Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes: une expérience d'entraînement D'étudiants dans un club mathématique. *In Educational Studies in Mathematics* 27(1), 1-33.
- Cuoco, A. y Curcio, F. (Eds.) 2001 *The roles of representation in school mathematics*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.
- DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006) Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 131-147.
- Díez, J. (2004), *L'ensenyament de les matemàtiques en l'educació de persones adultes. Un model dialògic*. Tesis de Doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. Barcelona.
- Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Jurdak, M. y Shahim I. (2001), "Problem solving activity in the workplace and the school: the case of

constructing solids", *Educational Studies in Mathematics Education*, 47 (3), 297-315.

AGRADECIMIENTO. Las autoras agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional a través de las investigaciones con números de registro; 20120794 y 20111060.