REPRESENTACIÓN Y VISUALIZACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA TRIGONOMETRÍA: UN CALCULADOR GRÁFICO DE VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

OSCAR JESÚS SAN MARTÍN SICRE
Universidad Pedagógica Nacional- Instituto de Formación Docente del Estado de Sonora

RESUMEN: Se presenta una aportación teórica en matemática educativa donde se proveen los fundamentos geométricos y trigonométricos que permiten construir, utilizando software de geometría dinámica, un calculador gráfico de valores de funciones trigonométricas. Una versión más sencilla del prototipo es también construible utilizando recursos didácticos tradicionales (cartón, acetatos) con lo que se propicia el plausible logro de la equidad educativa. En el mismo trabajo se recupera lo concerniente a un estudio comparativo de la visualización en dos registros de representación semiótica de Duval para la trigonometría. Los problemas abordados en la investigación consistieron en: 1) Encontrar los fundamentos geométricos y trigonométricos que permitieran construir un calculador trigonométrico gráfico, aquí se utilizó de manera elemental el método axiomático deductivo propio de la geometría, y, 2) Comparar una visualización de las funciones trigonométricas en un semicírculo, con la visualización de las mismas en un círculo trigonométrico unitario. Las dos visualizaciones corresponden a registros de representación semiótica de Duval. En ésta última parte se recuperaron esencialmente las ideas contenidas en los trabajos de Raymond Duval.

Palabras clave: registro de representación semiótica, visualización, calculador gráfico, función, trigonometría.

Introducción

Desde el inicio de la educación preescolar hasta la educación superior se desarrollan simultáneamente en la escuela tres procesos fundamentales asociados a lo educativo:1) El desarrollo de la inteligencia del sujeto que aprende, 2) El aumento progresivo de la complejidad del objeto didáctico - matemático de estudio abordado en los currículos, y 3) Las estrategias didácticas para recuperar lo concerniente a la vertiente empírica contenida en la construcción del conocimiento del objeto didáctico - matemático. El citado proceso inicia con la interacción, manipulación y experiencia con objetos materiales concretos (en la educación básica), y culmina con la plausible utilización y recuperación de registros de representación semiótica (Duval, 1993) en la educación media y superior y/o con la recuperación de representaciones dinámicas recuperables de diversos software.

Aquí se piensa que algunos registros de representación semiótica resultan más adecuados para interiorizar un concepto u objeto matemático en estudio que otros. Creemos que esto es debido a que sus correspondientes visualizaciones recuperan más rasgos o propiedades específicas del correspondiente objeto didáctico - matemático en cuestión. En este contexto y con el propósito de someter este estudio a crítica constructiva y competente: 1) Se comparan las visualizaciones asociadas a dos registros de representación semiótica para la trigonometría, y 2) Se proveen los fundamentos geométricos y trigonométricos que permiten construir, empleando software de geometría dinámica un “calculador trigonométrico gráfico” que permite “estimar” (o más bien “medir”, que aquí interpretamos como “calcular” en un sentido laxo), los valores correspondientes a las 6 funciones trigonométricas básicas y los de sus inversas correspondientes, todo ello para ángulos entre 0° y 90° para el seno, el coseno y sus inversas, y para ángulos entre 0° y 45° para el resto de las funciones y sus inversas. (Se adelanta aquí que ésta última restricción se debe a que el tamaño de la pantalla del monitor no permite obtener representaciones gráficas de los valores de la tangente, cotangente, secante y cosecante).

Ideas principales de Jean Piaget y de Raymond Duval recuperadas en el estudio

De la obra (Trilla,J., 2005) hemos recuperado algunas de las tesis constructivistas de Jean Piaget aplicables al aprendizaje del sujeto, a saber:

- El proceso de construcción de conocimiento del sujeto está mediado por dos tipos de interacciones: a) Físicas: experimentadas con su entorno físico o concreto, b) Sociales: vividas con las personas con quienes tiene contacto.

- La construcción de conocimiento por interacción física requiere de manipulaciones o experiencias con objetos materiales. La construcción (mental) individual de conocimiento se origina en estas interacciones físicas por procesos de abstracción reflexiva o reflexionante donde el sujeto interioriza abstracciones, relaciones, coordinaciones, invariantes o las "lógicas" inherentes al problema o a la situación que está experimentando.

Aquí se piensa que si la interacción física con materiales concretos (y sus consecuentes abstracciones e interiorizaciones mentales) no resulta posible, entonces los registros de representación semiótica y sus correspondientes visualizaciones pueden considerarse como "aproximaciones" que posibilitan cierta interacción física con representaciones del objeto matemático.

Por otra parte, los distintos "objetos de conocimiento didáctico - matemático" planteados en el currículo y que se pretende que el alumno construya, poseen diferente grado de dificultad cognitiva, algunos son más "sencillos" o menos abstractos que otros. En consecuencia, los materiales concretos que se requieren para propiciar su construcción o visualización varían según los niveles educativos. Los más "sencillos" corresponden al nivel de la educación preescolar donde pueden ser relativamente simples (materiales no estructurados y juguetes usualmente sencillos), y los más complicados corresponden al nivel de educación superior donde tales materiales concretos pueden ser inexistentes. En este nivel suele trabajarse con registros de representaciones semióticas del objeto didáctico – matemático, o bien puede utilizarse software o TIC.

Se considera pertinente mencionar que aunque el calculador gráfico que aquí se presenta puede diseñarse y construirse con software de geometría dinámica también puede construirse (para el seno y el coseno) con material didáctico tradicional (como puede verse en (San Martín, O, 1993)). Esta versatilidad del prototipo didáctico resulta importante por dos razones: propicia interacciones físicas y sociales de dos tipos diferentes en el proceso de construcción de conocimiento, y permite atender las necesidades educativas de grupos sociales sin acceso a recursos tecnológicos actuales con lo que se propicia el plausible logro de equidad educativa.

De los trabajos de Raymond Duval (Sanchez y Zubieta, 1993), consideramos necesario recuperar varias ideas básicas, a saber: 1) Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente resulta deseable tener representaciones de los mismos, 2) El conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas, y 3) Duval considera al conocimiento conceptual como el invariante de múltiples representaciones semióticas.

Breve estado del arte para la problemática abordada.

Visualización en un círculo.

Casi en cualquier libro de texto de trigonometría elemental, como por ejemplo (Ayres, F., 1954) puede encontrarse una manera de visualizar como segmentos de recta a las 6 funciones trigonométricas. Llamaremos “visualización en un círculo” a este tipo de representación de las funciones y lo describimos a continuación.

El círculo que aquí se describe, el “circulo unitario” ha sido construido como se indica a continuación y ha sido tomado de la obra citada.

El segmento AO correspondiente al radio del círculo es unitario
El segmento AQ es perpendicular al segmento AO
El segmento MP es perpendicular al segmento AO
El segmento RB es perpendicular al segmento BO
El punto O corresponde también al origen de un sistema de coordenadas .
El punto P es un punto del círculo, este punto puede desplazarse sin que se altere el triángulo rectángulo correspondiente salvo en los casos extremos en que P coincide con los puntos de intersección del círculo con los ejes de coordenadas

Visualización de las funciones trigonométricas en un círculo para ángulos entre cero y noventa grados.

Si en la figura 1, (al final) denominamos ángulo x al ángulo POA se tiene lo siguiente:

Sen x = MP/PO = MP

Cos x = OM/PO = OM

Tan x = MP/OM = AQ/OA = AQ

Cot x = MO/MP= RB/BO = RB

Sec x= PO/MO = QO/AO = QO

Csc x = PO/MP = RO/BO = RO

En la figura puede visualizarse que las funciones trigonométricas corresponden a segmentos de recta.

Visualización en un semicírculo

El semicírculo del que se ocupa este estudio, (figura 2) y que provee la base geométrica y trigonométrica para la construcción del calculador trigonométrico gráfico ha sido construido como se indica a continuación y ha sido recuperado de (San Martín, 1992, 1993):

- El segmento AB, correspondiente al diámetro del semicírculo, es unitario

- En el punto B, se levanta una semirrecta perpendicular al segmento AB

- En el punto A, se levanta una semirrecta perpendicular al segmento AB

- El punto P es un punto del semicírculo de modo que el ángulo APB es recto. Este punto puede desplazarse a lo largo del semicírculo sin que el triángulo deje de ser rectángulo (En los casos extremos en que P coincide con B o con A)

- El punto D corresponde a la intersección de la prolongación del segmento AP con la semirrecta perpendicular a AB levantada en B

- El punto E corresponde a la intersección de la prolongación del segmento BP con la semirrecta perpendicular a AB levantada en A

- Los triángulos ABP, ABD y ABE son todos triángulos rectángulos y son semejantes entre sí.(puede demostrarse fácilmente)

Visualización de las funciones trigonométricas en el semicírculo para ángulos entre cero y noventa grados

Si en la figura antes descrita denominamos ángulo x al ángulo PAB se tiene lo siguiente:

Sen x = BP/AB = BP

Cos x = PA/AB = AP

Tan x = BD/AB = BD

Cot x = EA/AB = EA

Sec x = AD/AB = AD

Csc x = BE/AB = BE

En la figura 2 puede visualizarse que las funciones trigonométricas de un ángulo agudo corresponden a segmentos de recta.

Un calculador trigonométrico grafico para estimar (medir) el seno, el coseno y sus inversas para ángulos entre 0° y 90°

En (San Martín,O y Soto, J.L, 2001) se describe como se construyó (utilizando Cabri) y como se aplicó didácticamente un calculador trigonométrico gráfico para estimar numéricamente los valores del seno y del coseno para ángulos entre 0° y 90°.

El procedimiento es relativamente sencillo y consiste en lo siguiente (ver la segunda figura al final):

1. Se dibuja un semicírculo de diámetro unitario. Se adiciona al semicírculo una escala para representar los valores de los ángulos BAP en grados, esta escala comienza en 0° que corresponde al punto B y termina en 90° que corresponde al punto A del semicírculo. La razón de la elección de estos valores consiste en que la escala que comienza en 0° y termina en 90°, mide los valores de ángulos BAP inscritos en el semicírculo (la escala de los transportadores normales mide los valores de los ángulos centrales).

2. Se designan con A y con B a los extremos del diámetro.

3. Si P es un punto que se desplaza sobre el semicírculo se tiene que: sen BAP = BP y cos BAP = AP

4. Si al segmento BP se le adiciona una escala numérica BPD (en centésimos de unidad) que comienza en 0.00 para el punto B y termina en 1.00 para el punto D se podrán leer directamente en “el aparato” tanto el valor del ángulo BAP como el de Sen BAP.

5. Se procede de manera análoga para el coseno de BAP.

Elementos para la construcción de un calculador trigonométrico grafico para estimar (medir) los valores del seno, el coseno y sus inversas para ángulos entre 0° y 90° y las restantes funciones para ángulos entre 0° y 45°

Del procedimiento descrito en la sección anterior se desprende fácilmente la manera de construir (más bien completar) el calculador trigonométrico gráfico.

Para ello habrá que agregar a la figura 2 lo siguiente

1. Una escala en centésimos para la tangente BD, dicha escala de una unidad de longitud comenzará con el valor 0.00 para el punto B y terminará con el valor 1.00 para el punto D.

2. Se procede de manera similar para la cotangente AE

3. Una escala en centésimos para la secante AD, dicha escala de √2 de longitud, comienza con el valor 0.00 para el punto A y termina con el valor √2 para el punto D.

4. Se procede análogamente para la cosecante.

5. Como antes se dijo, podrían considerarse valores mayores a 45° para la tangente y la secante pero no cabrían en la pantalla.

Descripción de la metodología utilizada

La metodología utilizada para derivar la figura 2 es la propia del método axiomático deductivo aunque esto ha sido hecho de manera elemental. La figura 2 surgió de manera accidental al investigar otro tipo de problema, el resto solo consistió en probar la semejanza de los triángulos involucrados y en recuperar y aplicar dos teoremas sencillos de la geometría elemental.

Naturalmente, al ser un trabajo en matemática educativa también se han recuperado, para complementar el trabajo, las ideas teóricas de J. Piaget y de R. Duval.

Posibles trabajos futuros de investigación

Se piensa que las posibilidades de investigación en educación matemática para trabajos basados en derivaciones de la figura 2, son muy amplias, por ejemplo.

1. Extendiendo la figura 2 a manera de teselación al plano pueden conceptualizarse las identidades como los invariantes que resultan cuando el punto P se desplaza sobre el semicírculo.

2. Similarmente pueden derivarse criterios geométricos para generar y clasificar a las identidades.

3. Puede hacerse un estudio de la didáctica de las identidades que comience con verificaciones empíricas numéricas y termine con demostraciones de tipo geométrico

4. Pueden hacerse estudios sobre la resolución (gráfica) de ecuaciones trigonométricas. Ejemplo puede hacerse girar el punto P de manera que para algún valor del ángulo las magnitudes de diversas funciones coincidan numéricamente, así se tendría un “resolvedor numérico – gráfico de ecuaciones trigonométricas.

5. Es posible construir calculadores trigonométricos gráficos utilizando también la misma “técnica” pero tomando como figura básica al círculo trigonométrico unitario.

6. Pueden hacerse estudios comparativos para los distintos calculadores gráficos como el que se esboza en la siguiente tabla que se ha aplicado a las visualizaciones.

Comparación de algunos rasgos de las visualizaciones

En la tabla que se presenta a continuación se recuperan algunos rasgos o propiedades que pueden asociarse y estudiarse en las dos visualizaciones que se estudian en este trabajo.

Tabla 1. **Visualizaciones asociadas a dos registros de representación semiótica**

Rasgo	Semicírculo	Círculo	Comentario
Simplicidad de la representación			La representación en el semicírculo es más sencilla
Propiedades mnemotécnicas	Se pueden asociar las funciones por parejas	No se pueden asociar las funciones por parejas	Desde el punto de vista de la memoria a largo plazo es más adecuada la representación en el semicírculo
Conocimientos escolarizados previos necesarios	Algebra, geometría	Algebra, geometría, geometría analítica	La representación en el semicírculo es más accesible
Simetría	Los segmentos correspondientes a las funciones son simétricos con respecto a una perpendicular levantada en el punto medio del diámetro.	Los segmentos no parecen ser simétricos	La representación en el semicírculo permite verificar por ejemplo geométricamente que la función de un ángulo es igual a la cofunción de su complemento
Variación (rango) de los valores de la funciones	Se observa para valores correspondientes a ángulos agudos	Se observa para valores correspondientes a ángulos agudos pero puede extenderse para cualquier valor del ángulo	Si se hacen algunas convenciones adecuadas la representación en el semicírculo también puede extenderse, sin embargo la extensión en el círculo es más general, posibilita los valores negativos y es más natural, más intuitiva.

Dominio de las funciones	La visualización resulta "natural" o intuitiva para valores de ángulos entre cero y noventa grados	La visualización resulta natural o intuitiva para valores de ángulos entre cero y trescientos sesenta grados	Cada representación resulta adecuada en su dominio correspondiente.
Periodicidad	No se capta intuitivamente	Resulta natural o intuitiva	Para la construcción de este significado resulta más adecuada la representación en el círculo
Relaciones entre las funciones para todos los valores de la variable (identidades trigonométricas)	Se capta intuitivamente para varias identidades	No se capta intuitivamente	Para la construcción de este significado resulta más adecuado el semicírculo
Relaciones entre las funciones (visualizadas) para algunos valores de las variables (ecuaciones trigonométricas)	Se capta intuitivamente para algunas ecuaciones	No se capta intuitivamente	Para la construcción de este significado resulta más adecuado el semicírculo

Conclusiones

Se piensa que el trabajo aquí presentado puede incidir positivamente en dos dimensiones: 1) La dimensión científica-educativa, en este contexto puede inscribirse en los estudios sobre representación y visualización asociados a los registros de representación semiótica de Duval, 2) La dimensión socio-educativa: El prototipo provee una manera de integrar de manera congruente y práctica diversos contenidos educativos que usualmente se presentan de manera dispersa en geometría y trigonometría. Además, como el instrumento puede construirse con o sin software entonces propicia el logro de la equidad educativa.

Visualización de las funciones trigonométricas en un círculo para ángulos entre cero y noventa grados.

Si en la figura denominamos ángulo x al ángulo POA

Sen x = MP/PO = MP

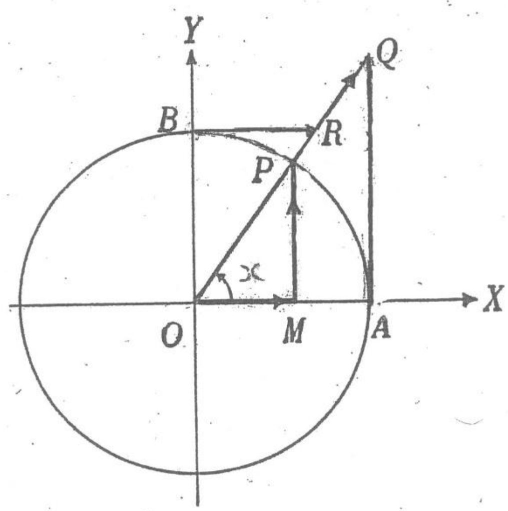
Cos x = OM/PO = OM

Tan x = MP/OM = AQ/OA = AQ

Cot x = MO/MP= RB/BO = RB

Sec x= PO/MO = QO/AO = QO

Csc x = PO/MP = RO/BO = RO



Visualización de las funciones trigonométricas en el semicírculo para ángulos entre cero y noventa grados

Sen x = BP/AB = BP

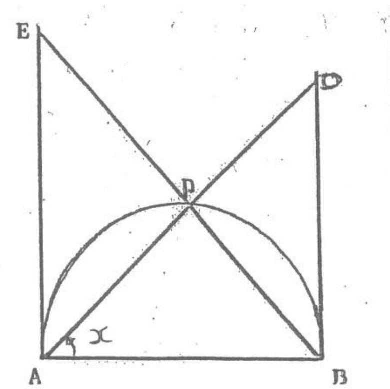
Cos x = PA/AB = AP

Tan x = BD/AB = BD

Cot x = EA/AB = EA

Sec x = AD/AB = AD

Csc x = BE/AB = BE



Referencias

Ayres, F. (1954). **Trigonometry.** New York. Schaum Publishing Company.

Innocenti, G. (1982). **Lecciones de Trigonometría.** México. Limusa.

Orton, A.(1990). **Didáctica de las matemáticas.** Madrid. Ediciones Morata S.A.

Sánchez y Zubieta. (comps) (1993). **Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa.** México. CINVESTAV. IPN.

San Martín, O. (1992). **Sobre la definición de función trigonométrica de un ángulo agudo. Una propuesta pedagógica.** Memoria de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa. Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 1992.+

San Martín, O. (1993). **Transportador Trigonométrico Poster.** Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa. Universidad de Panamá. Ciudad de Panamá. agosto de 1993.

San Martín, O. (1998). **Construcción y clasificación de identidades trigonométricas utilizando recursos y criterios de tipo geométrico.** Resúmenes de la XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

San Martín, O. (1999). **Representación geométrica de ecuaciones trigonométricas.** Resúmenes de la XIII Reunión Latinoamericana de matemática Educativa. Sto. Domingo, República Dominicana.

San Martin, O. y Soto, J:L (2001). **Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con Cabri.** Memorias de la XI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora, México.

San Martín, O. (2005). **Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón.** Memoria del VIII Congreso Mexicano de investigación educativa. Hermosillo, México.

Trilla, J. (comp.) (2005). **El legado pedagógico del siglo XX para la escuela del siglo XXI.** Barcelona. Editorial Graó.

.