



DISEÑO DE UNA ACTIVIDAD DIDÁCTICA BASADA EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL COMO MODELO PARA UN CURSO DE TEORÍA DE CONTROL

PATRICIA LIZETTE GUZMÁN LÓPEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE NAYARIT, CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y
TECNOLOGÍA AVANZADA DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL (CICATA-IPN)
paty_lgl@hotmail.com

OLDA NADINNE COVIÁN CHÁVEZ

CICATA-IPN
nadinne.olda@gmail.com

AVENILDE ROMO VÁZQUEZ

CICATA-IPN
aromov@ipn.mx

Resumen

En esta comunicación se presenta una investigación en desarrollo que busca generar una propuesta didáctica para una formación de futuros ingenieros que relacione la enseñanza de las ecuaciones diferenciales con sus usos en la teoría de control. Se utiliza la metodología para el diseño de actividades propuesta en Macías (2012), la cual se basa en la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999).

Palabras clave: Modelación matemática, praxeología, ecuaciones diferenciales, teoría de control





INTRODUCCIÓN

En la formación de ingenieros, los conocimientos matemáticos son primordiales ya que permiten realizar una formación de especialidad para ejercer una práctica profesional, donde la modelación matemática se considera una herramienta fundamental. En los primeros años de su formación hay una considerable proporción de conocimientos sobre matemática, cálculo diferencial, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, estadística, entre otras, lo cual conlleva a preguntarse: ¿Las matemáticas que se enseñan son realmente necesarias para la práctica profesional de los ingenieros? Y de manera más específica ¿cómo es la matemática que se les enseña?, ¿en qué situaciones resulta útil?, ¿los cursos recibidos dotan de elementos para la modelación matemática que tiene lugar en la práctica profesional? Diferentes investigaciones se han realizado en torno a estas preguntas (Pollak, 1988; Bissell y Dillon, 2000; Kent y Noss 2001; Kent, 2007; Romo, 2009; Macias 2012; Soto 2013; Martínez 2014 y Morillo, 2015) y han puesto de manifiesto que la modelación matemática es clave para vincular la formación matemática con la formación de especialidad y con la práctica profesional. Es por ello, que en esta investigación se propone el estudio de una posible relación entre el curso de ecuaciones diferenciales y el curso de teoría de control, en un contexto de formación mexicano de futuros ingeniero.

En el área de enseñanza de la electrónica y afines, se emplea a menudo el uso de un modelo matemático basado en ecuaciones algebraicas, funciones, proporciones y ecuaciones diferenciales. Estos modelos se encuentran relacionados con las leyes físicas que provienen de esta disciplina, por ejemplo las leyes de Ohm y Kirchoff. Ello implica la solución de una ecuación del tipo algebraico, diferencial o bien que emplee números complejos, que representa el comportamiento de un circuito eléctrico, que puede a su vez representar fenómenos de ingeniería como son: ahorro de energía, control de motores, potencia, instrumentación, automatización, entre otras áreas del tipo industrial o residencial. Sin embargo, es muy común encontrar que los alumnos carezcan de las herramientas matemáticas necesarias para modelar y estudiar dichos fenómenos. En el caso de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica, del sistema de universidades tecnológicas, durante la formación de Técnico Superior Universitario (que corresponde a los dos primeros años de la carrera), se imparte únicamente un curso de matemáticas básico, no es posible por tanto profundizar en los temas que en él se estudian. Parece ser más un repaso de temas de álgebra, números complejos, cálculo diferencial e integral, que en un curso donde se impartan bases para otros cursos como el de sistemas de control automático (tercer cuatrimestre)





y en el cual deben modelizar sistemas físicos a través del uso de ecuaciones diferenciales. Éstas son desconocidas para los alumnos e ignoran cómo deben resolverse. Lo anterior provoca que el profesor que imparte el curso decida qué enseñar. Si las condiciones lo permiten realizar un curso paralelo y complementario de ecuaciones diferenciales, si no es posible, entonces encontrar un punto de equilibrio para enseñar los conceptos básicos de la ecuación diferencial y su solución así como los saberes propios que marca la hoja temática de la asignatura de sistemas de control. Las consecuencias pueden ser un desvío del objetivo de la materia, realizar un curso donde el contenido sea muy cargado hacia la matemática, desencadenando la desmotivación del alumno quien espera un curso diferente relacionado a la automatización por medio de elementos electrónicos, hidráulicos o eléctricos y donde las matemáticas no sean centrales. Cabe mencionar que sí existe un curso de ecuaciones diferenciales en la formación académica de los ingenieros mecatrónicos, sin embargo éste aparece hasta el tercer año (séptimo cuatrimestre). ¿Cómo generar un curso equilibrado entre los modelos matemáticos, ecuaciones diferenciales, y los elementos básicos de la teoría de control? ¿La modelación matemática puede ser considerada como una herramienta clave en el diseño de este curso? Estas cuestiones son abordadas en esta investigación, que se encuentra en una etapa inicial, basada en una aproximación antropológica que permita analizar el rol de las matemáticas en la enseñanza de la teoría de control, para generar posteriormente una propuesta didáctica para este curso.

MATEMÁTICAS EN LOS PROCESOS DE AUTOMATIZACIÓN

En la automatización de procesos, industriales y/o residenciales, el empleo de las matemáticas es primordial, dentro de la formación de ingenieros en control, mecatrónica, electrónica, entre otros similares, es posible encontrar dentro de su plan de estudios una asignatura de control automático. Ésta tiene el propósito de proporcionar las bases, a través de la teoría de control, para lograr la automatización de procesos.

La teoría de control estudia el comportamiento de los sistemas físicos mediante leyes matemáticas que permiten el gobierno de los mismos, la sola descripción de un sistema requiere de una gran cantidad de ecuaciones matemáticas, las cuales permiten conocer las características y funcionamiento de un sistema. Por ello, es importante el dominio de áreas matemáticas que van desde el álgebra hasta ecuaciones diferenciales. Estas últimas son las protagonistas en la





descripción y análisis matemático de un sistema de control, fases fundamentales en su tratamiento.

En el diseño de un sistema físico, resulta primordial conocer el modelo matemático asociado proveniente de las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de cada elemento del sistema. La finalidad de este modelo es llevar a cabo un análisis cuantitativo que permita determinar sus características, su comportamiento, sus limitaciones así como buscar alternativas para mejorar su funcionamiento.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLOGÍA

La metodología para el diseño de actividades didácticas de modelación matemática, se basa en la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999), ya que provee un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional.

Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia. (Castela y Romo, 2011, p.85).

La praxeología [T, τ, θ, Θ] se reconoce como una unidad mínima de análisis de la actividad humana. Sus cuatro componentes son: tipo de tarea T , técnica τ , tecnología θ y teoría Θ . La tarea es lo que se hace, la técnica es la manera en que se hace, la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, la teoría a su vez produce, justifica y explica la tecnología.

Esta metodología surge en la investigación de Macías (2012) y se ha ido refinando desde entonces (Macías y Romo, 2014), sus cuatro fases y una breve descripción de cada una de éstas se presentan a continuación.

ELECCIÓN DE UN CONTEXTO EXTRA-MATEMÁTICO

En esta fase se propone elegir un contexto de uso de praxeologías de modelación, al considerar una formación de ingenieros se proponen como contextos naturales de uso son la formación de especialidad E (DI) y la práctica profesional Ip, vistas como instituciones.





ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO E IDENTIFICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

En esta fase se analiza el contexto extra-matemático elegido con el objetivo de identificar una praxeología de modelación y el modelo matemático asociado que se utilice en este contexto pero que también sea objeto de enseñanza en la formación matemática.

ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO IDENTIFICADO Y SU RELACIÓN CON E(M)

Se analiza el modelo matemático identificado través de las funciones de la tecnología práctica: describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar. Analizar estas funciones de la tecnología, conlleva a explicitar las justificaciones, explicaciones, interpretaciones relacionadas con el uso del modelo y no con el modelo matemático mismo. Es decir, ¿por qué se elige como modelo? ¿Qué lo hace eficaz? ¿Cómo se valida su eficacia? Estas funciones no se explicitan en esta comunicación debido a que todavía no han sido consideradas en el análisis.

DISEÑO DE LA ACTIVIDAD DIDÁCTICA PARA E(M)

El diseño de la actividad didáctica debe basarse tanto en el análisis praxeológico de uso como en el del modelo matemático identificado, que pueda ser implementada en el aula. Se trata de establecer una nueva relación entre la forma en que se enseña el modelo y la forma que éste se usa en determinado contexto.

Esta metodología ha sido considerada para analizar el rol de los modelos matemáticos en un curso de teoría de control, en particular el análisis se ha centrado en uno de los elementos básicos de esta teoría, el controlador.

ANÁLISIS DEL CONTROLADOR, ELEMENTO BÁSICO DE LA TEORÍA DE CONTROL

El análisis del curso se ha basado en textos como Ogata (1998), Kuo (1996), Bolton (2001) y Hernández (2010) y considerando para ello más específicamente las dos primeras fases de la metodología, ya que la tercera fase debe ser complementada por un análisis de un curso de ecuaciones diferenciales y una vez hecho éste se podrá realizar la última y cuarta fase.





ELECCIÓN DEL CONTEXTO EXTRA-MATEMÁTICO

En el contexto elegido debe identificarse algún modelo matemático que también sea objeto de enseñanza en los cursos de matemáticas.

Se ha decidido analizar el curso de sistemas de control automático, en el cual se emplean las leyes de la teoría de control para llevar a cabo la automatización de procesos, dichas leyes permiten modelar el comportamiento de un sistema físico a través de ecuaciones diferenciales.

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO E IDENTIFICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

Todos los elementos que forman un sistema de control, se pueden considerar como pequeños sistemas que trabajan en conjunto para lograr un determinado comportamiento, para todos ellos es necesario encontrar la Función de Transferencia, la cual es la relación matemática entre la salida (lo que hay realmente) y la entrada del sistema (lo que se desea), y está definida solamente para sistemas lineales, invariantes en el tiempo, monovariantes y de parámetros concentrados. La Función de Transferencia es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar una ecuación diferencial ordinaria, lineal, con coeficientes constantes, para relacionar la variable de salida con la variable de entrada de un sistema para todos sus componentes (controlador, actuador, planta, sensor). Además, la Función de Transferencia está determinada a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que son enseñadas en la formación básica de ingenieros.

Uno de los componentes básicos de cualquier sistema de control es el controlador. Este elemento determina, dada una entrada al sistema de control, qué acción va a tomar. Comúnmente se define como el cerebro del sistema y por tanto podríamos identificarlo como un elemento tecnológico. Por ejemplo, en un sistema de control de temperatura para un acuario el elemento controlador es el tornillo de calibración (ver Figura 1).



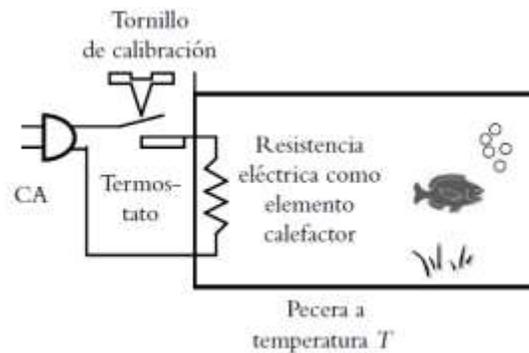


FIGURA 1. SISTEMA DE CONTROL DE TEMPERATURA PARA UN ACUARIO. TOMADA DE HERNÁNDEZ (2010, P. 18).

El termostato cumple dos funciones, comparador y sensor, que mide la temperatura del agua de forma constante. La entrada al sistema o referencia, está dada por medio de una perilla selectora (tornillo de calibración), es decir, la temperatura adecuada que el agua debe tener, de este modo se toma la decisión para activar la resistencia que funciona como elemento calefactor, como un controlador automático.

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (valor deseado), determina la desviación o error, y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera o técnica en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina acción de control. El controlador detecta la señal de error, que por lo general está en un nivel de potencia muy bajo, y lo amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador automático, alimenta a un actuador tal como un motor hidráulico o un motor eléctrico, una válvula neumática, etc.

La relación entre la salida y la entrada al controlador con frecuencia se denomina Ley de Control, existen tres leyes de control: proporcional, integral y derivativo, para cada una de ellas se debe modelar una ecuación diferencial que describa el comportamiento del controlador. Esto nos parece constituir un elemento tecnológico que sustenta la técnica asociada al funcionamiento del controlador. Será necesario profundizar el análisis para ilustrar con precisión la praxeología de modelación en juego.





ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO IDENTIFICADO Y SU RELACIÓN CON E(M)

El método de la transformada de Laplace es el único que se emplea para la solución de los modelos que se obtienen en la teoría de control, esto porque la Función de Transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal, e invariante en el tiempo se define en el dominio de Laplace, como: El cociente entre la Transformada de Laplace de la salida o respuesta del sistema y la Transformada de Laplace de la entrada o función de excitación, bajo la suposición que todas las condiciones iniciales son cero. Será por tanto necesario realizar un análisis del sistema de ecuaciones diferenciales que sustenta la Función de Transferencia y el uso de la Transformada de Laplace, como única técnica matemática asociada a estos modelos

DISEÑO DE LA ACTIVIDAD DIDÁCTICA

Esta fase aún no se trabaja, pero al haber identificado las ecuaciones diferenciales, la Función de Transferencia y la Transformada de Laplace, como elementos matemáticos que permiten una modelación matemática en teoría de control, consideramos que sobre éstos versará el diseño didáctico.

CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha presentado un avance del proyecto de investigación que tiene por objetivo generar una propuesta didáctica basada en modelación que favorezca una relación entre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y su uso como modelos matemáticos en la teoría de control. A pesar, de que este trabajo se inscribe en una problemática muy precisa que es la de la Universidad Tecnológica de Nayarit, consideramos que puede ser útil para otras formaciones, ya que encontrar un equilibrio entre lo teórico y práctico de un modelo matemático es esencial en la actividad de modelación matemática. En muchas formaciones se asume que la enseñanza de modelos, nociones y técnicas matemáticas es suficiente para que los estudiantes puedan convertirlas en herramientas generales que permitan resolver una diversidad de problemas. Desde nuestro punto de vista, esto no es posible, la actividad de modelación matemática se genera bajo condiciones precisas y es necesario conocerlas, explicitarlas y hacerlas parte de la misma enseñanza. Para ello, resulta necesario analizar los contextos de ingeniería donde la modelación tiene lugar, ya sea de enseñanza, como es la enseñanza de teoría de control, ya sea de una práctica profesional. La metodología considerada parece ofrecernos





una herramienta para generar una actividad didáctica que vincule la enseñanza con el uso de las ecuaciones diferenciales en una formación de ingenieros.





BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Bissell, C. & Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the Learning of Mathematics*, 20(3), 3-11.
- Bolton, W. (2001). *Ingeniería de control*. (2da. Ed.). México D.F.: ALfaomega.
- Castela, C. y Romo, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Chevallard, Y. (1999). *La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes* [Research in education and training of teachers: issues, concepts, problems]. Caen, France: Académie de Caen.
- Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB*. México: Pearson Educación.
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático*. (7ma. Ed.). México: Prentice Hall.
- Kent, P. (2007). Learning Advanced Mathematics: The case of engineering courses. Contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at postsecondary level. In Lester, K. F. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (Pp. 1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub.
- Kent, P. & Noss, R. (2001). Finding a role for technology in service mathematics for engineers and scientist. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university*. ICMI Study (pp. 395-404). Dordrecht, Netherlands: Springer.
- Martínez, E. (2014). *Diseño de una secuencia basada en optimización para la enseñanza del Cálculo Diferencial en formación de ingenieros*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN
- Macias, M. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN
- Morillo, A. (2015). *Una secuencia didáctica basada en modelización matemática para el curso de álgebra lineal* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN
- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna* (3ra ed.). México: Prentice Hall.





- Pollak, H. (1988). Mathematics as a service subject: why? En A. Howson, J. Kahane, P. Lauginie, y E. Turckheim (Eds.), Mathematics as a service subject (p. 28-34). Great Britain: Cambridge University Press.
- Romo-Vázquez, A. (2009). Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs. Paris: Irem de Paris.
- Soto, S. (2012). La modelación matemática y su vinculación con el entorno de la formación matemática de ingenieros. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN

