DEJAR DE VER LO QUE SE VE, Y VER LO QUE NO SE VE: LA CONSTRUCCIÓN DE LAS MAGNITUDES EN LOS LIBROS DE TEXTO

TATIANA MARÍA MENDOZA VON DER BORCH
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS DEL CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

TEMÁTICA GENERAL: EDUCACIÓN EN CAMPOS DISCIPLINARES

RESUMEN

Diversos estudios han mostrado que la posibilidad de trabajar con magnitudes, es decir, comparar, ordenar o reproducir objetos atendiendo a una magnitud, antes de medirlos utilizando unidades, es fundamental para lograr una buena comprensión de la medición. La ausencia de este trabajo produce efectos como la confusión entre distintas magnitudes o desconocimiento de procedimientos de medición. En este trabajo analizo hasta qué punto las propuestas curriculares oficiales se han hecho cargo de dicho aspecto de la medición, a partir de una revisión de los libros oficiales de matemáticas de la década de los sesenta, setenta, noventa y la actual, es decir, las grandes reformas curriculares que han tenido lugar en los últimos cincuenta años, y también, pero de manera no exhaustiva, de algunos libros de editoriales particulares que se ofrecen en el país.

No pretendo caracterizar cada una de las propuestas ni compararlas de manera sistemática, sino analizar el peso que se le da a la construcción de las distintas magnitudes y la problemática que las hace emerger como relevantes en una situación didáctica. Enfatizo el hecho de que, si bien se ha tomado cada vez más conciencia de la importancia de que los alumnos tengan una idea clara de qué es cada magnitud, es un asunto aún poco visible, con varios retos por resolver.

Palabras clave: Análisis curricular, Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas, Educación Básica

INTRODUCCIÓN

El dulzor de las uvas, la carga eléctrica, los centímetros de pez, la envergadura de un pájaro, la intensidad luminosa, son ejemplos de características medibles de algunos objetos[1]. Ninguna de ellas es evidente, intrínseca a los objetos, fácil de identificar y comprender. Todas son construcciones sociales, resultado y a la vez causa de diversas y complejas problemáticas en épocas y lugares geográficos específicos. Su funcionalidad, su pertinencia, depende del contexto, la problemática en la que es importante ponerlas de relieve. Lo mismo ocurre con las magnitudes escolares, como la longitud, la superficie o el peso. (Kula, 1998, Brousseau, 2000)

Esto se puede sostener desde distintos ángulos, como el de la historia de la medición. Por ejemplo, desde la Alta Edad Media y durante diez siglos, los terrenos se medían principalmente de dos maneras en Europa: por el tiempo de trabajo humano -la superficie de tierra que dos bueyes pueden arar en un día- y por la cantidad de grano sembrado -un terreno para sembrar un *korzec*[2] y 24 cántaros-. Estos procedimientos eran más funcionales que la medición por superficie, pues dos terrenos de igual extensión pueden ser completamente distintos en términos de productividad: uno puede ser más pedregoso, estar en una región más árida, montañosa, lejana a la ciudad que el otro. En suma, de las numerosas propiedades de la tierra, las que se ponían en primer plano por su importancia para el hombre eran la cantidad de trabajo necesario para hacer que la tierra diera frutos, o bien, su fertilidad. La cantidad de superficie era lo de menos. El paso a la medición por superficie fue el resultado de un largo proceso en el que intervinieron diversos factores como el trabajo de la tierra, el cobro de tributos, el aumento en la densidad poblacional (Kula, 1998)

Diversos estudios sobre aprendizaje en contextos no escolares han puesto de relieve el mismo asunto. En particular, De Agüero (2006), en una investigación sobre estrategias para resolver problemas que implican la puesta en juego de conocimientos matemáticos por parte de una cuadrilla de pintores, muestra que ellos tienen perfecta conciencia de la noción de superficie y disponen de estrategias complejas para calcularla, pero para decidir el presupuesto no conviene considerar únicamente esta magnitud. Levantan medidas, hacen los cálculos que permiten obtener el total de metros cuadrados que pintarán y las áreas de exteriores e interiores, y por tanto la cantidad de pintura que usarán. Pero esto no es suficiente para calcular el presupuesto. Es decir, para calcular cuánto cobrarán por pintar un inmueble importa la superficie, pero también el tiempo invertido, el esfuerzo físico implicado en el trabajo, las condiciones en las que se encuentran las paredes y el riesgo que personalmente puede correrse al hacer el trabajo. La superficie en este contexto está ligada a otra serie de características y no es conveniente, ni sensato, separarla, aislarla como el único criterio a considerar.

Finalmente, investigaciones sobre el aprendizaje de las magnitudes en la escuela reportan la misma tendencia. El estudio de Chamorro (2005), muestra que alumnos de quinto grado de primaria tienen considerables y persistentes dificultades para distinguir la superficie de una figura de su forma y también de su perímetro. Frente a la consigna de enviar un mensaje a un compañero para que construya una figura equivalente en superficie a otra que sólo el emisor puede ver, los alumnos producen formulaciones como "tiene forma de cabeza de gato", "arriba del todo de esta figura hay dos triángulos que encuadran otro más grande vacío" "cada triángulo tiene un ángulo recto que se sitúa en el borde del trapecio que hay debajo" (p. 226) Es decir, intentan preservar la forma y no dan cuenta de la superficie.

En resumen, desde distintos ángulos se ha demostrado que poner de relieve una magnitud como característica para comparar objetos, dejando de lado otras propiedades de dichos objetos, es un trabajo intelectual arduo, largo, y también necesario para lograr una buena comprensión de la medición. Cabe preguntarse cómo se organiza esta construcción en la enseñanza, particularmente en los libros de texto. A continuación abordo este aspecto, a partir de una revisión de los libros oficiales de los seis grados de primaria elaborados en la década de los sesenta, setenta, noventa y la actual.

LA CONSTRUCCIÓN DE MAGNITUDES EN LIBROS DE TEXTO

Utilizo la Teoría de las Situaciones Didácticas, de Guy Brousseau (1986) como herramienta para analizar lecciones de libros de texto. Dicha teoría, que toma como aspecto central el contenido en juego, me permite poner atención en los aspectos de cada magnitud que se ponen de relieve y los que se dejan de lado, el papel que juegan las explicaciones, el tipo de problemas que se abordan, el manejo de variables didácticas en dichos problemas y las maneras de resolverlos.

El peso atribuido al trabajo con magnitudes, antes de medirlas

En la propuesta de los años sesenta, sólo se definen las magnitudes ángulo y volumen, las otras se consideran evidentes. El énfasis del estudio de las magnitudes estaba en la medición con unidades de ángulo y tiempo, en las conversiones de unidades de capacidad, en el uso de kilogramos y otras unidades de peso como contexto para abordar otros temas, y en las fórmulas de perímetro, superficie y volumen. Estos énfasis se pueden adivinar desde los títulos de algunas lecciones, como "el metro", "el kilogramo" "el litro" "el reloj", "los meses del año", que ponen de relieve las unidades convencionales de medida o un instrumento de medición. Llama la atención que los ángulos y el volumen se definan en esta propuesta. Es decir, se da por sentado que los alumnos saben qué es la superficie o el peso, quizás por su presencia en contextos extraescolares, pero se considera que los alumnos no saben qué es un ángulo, así que es necesario definirlo. En cambio en los noventa, se pone atención a la construcción de todas las magnitudes excepto capacidad y volumen. Al parecer, poco a poco se ha ido entendiendo que es necesario comparar objetos atendiendo a una magnitud, antes de medirlos. Sin embargo, el hecho de que las magnitudes son una construcción importante que requiere cierto tiempo es un asunto todavía poco visible: ocurre con frecuencia que la comparación directa de objetos atendiendo a cierta magnitud se abandone pronto para dar paso al uso de unidades, convencionales o no.

Analizaré ahora algunos datos específicos. En los libros de los seis grados de los años setenta hay en total diez lecciones que apuntan a comparar superficies de manera directa, considerablemente más de las que se dedican a la construcción de cualquier otra magnitud en cualquier otra propuesta[3]. Ciertamente, las lecciones se centran en comparar superficies de figuras superponiéndolas, dándole menor peso a otros procedimientos. Además dichas maneras de resolver son mostradas al alumno a través de explicaciones: en esa época no se consideraba que el alumno podría ponerlas en juego por sí mismo al resolver un problema. Pero se puede ver una clara conciencia de que la magnitud superficie no es evidente para los alumnos. En las lecciones se trabaja con figuras irregulares –a diferencia de otras propuestas que priorizan el estudio de la superficie con los polígonos que tienen fórmula- y se apunta a distinguir que la superficie de una figura no depende de su forma. Esta aproximación contrasta con la propuesta 2014, ahí la comparación directa de superficies de figuras no aparece en el programa, y por consiguiente tampoco en los libros de texto. El primer asunto que se trata en relación a la superficie es el cálculo de áreas por conteo de unidades.

En todas las propuestas hay dificultades para lograr secuencias didácticas articuladas. Por ejemplo, en la propuesta de 1993, la superficie se estudia antes que la longitud, a pesar de que es una magnitud más compleja (Chamorro, 2005). O bien, a pesar de que el programa del 2011 prescribe el estudio de superficies a partir de cuarto grado, desde el libro de texto de segundo hay lecciones en las que, para estudiar contenidos como la multiplicación de números naturales o fracciones, se recurre a superficies de figuras dando varios conocimientos por sentados. Por ejemplo, la lección “mosaicos”, de segundo, pide determinar cuántos mosaicos tienen algunos pisos de forma rectangular, en dos casos mostrando el rectángulo cuadriculado completo, en dos casos más mostrando el rectángulo pero con una “mancha” en el interior que no permite ver el número total de cuadritos, y en un caso más indicando únicamente la cantidad de hileras y de mosaicos por hilera. Es decir, la lección apunta hacia la fórmula del rectángulo porque implica una multiplicación –el contenido que es objeto de estudio- vista como suma iterada, cuando los alumnos no han iniciado todavía la medición de superficies con unidades, y menos aún, la comparación directa de superficies (SEP, 2014, p. 84).

A propósito de este último asunto, en todas las propuestas curriculares ocurre con frecuencia que la enseñanza de temas como fracciones, proporcionalidad, números naturales o decimales, se apoya en las magnitudes. Esto es un acierto, salvo por los casos en que dichas magnitudes no han sido aún construidas con solidez, o bien, de plano se dan por sentadas. Destaca el peso: en más de la mitad de las lecciones en las que interviene dicha magnitud en cada una de las propuestas curriculares, se usan, por ejemplo, cantidades de gramos, kilos y miligramos como contexto de problemas de números, suma y resta o proporcionalidad, frecuentemente sin un trabajo previo para familiarizar al alumno con estas unidades de medida. Cabe preguntarse si los alumnos que resuelven estas lecciones tienen claro qué tan pesado es un kilo o un gramo, y cuándo y cómo se usan.

La problemática que hace surgir a una magnitud como relevante

Es frecuente encontrar en libros de texto problemas en los que interviene cierta magnitud, la cual se muestra de manera tan transparente que se acaba por evitar la serie de dificultades para identificarla. Por ejemplo, en la lección "uso gráficas de barras" de tercer grado (SM Ediciones, 2006, p. 126) que aparece en la Figura 1. En este problema aparecen varios peces y se pide "medirlos". No se considera necesario aclarar que hay qué es lo que hay que medir, pues el largo ya está marcado. No se problematiza si hay que tomar en cuenta la boca, bigotes y cola de cada pez o no, de hecho no se utiliza un criterio constante: en el pez Gato se incluyen los bigotes y en el pez Gato cristal se excluye el barbillón. No se plantea la pregunta de cuál es la longitud que conviene tomar como el largo. Por ejemplo, el pez Guppy tiene una forma curva y sin la línea marcada seguramente sería difícil determinar de dónde a dónde se establece el largo, o bien, en el pez Barbo tigre, también podría considerarse el largo como la distancia de la boca al punto medio de la cola, no al extremo.

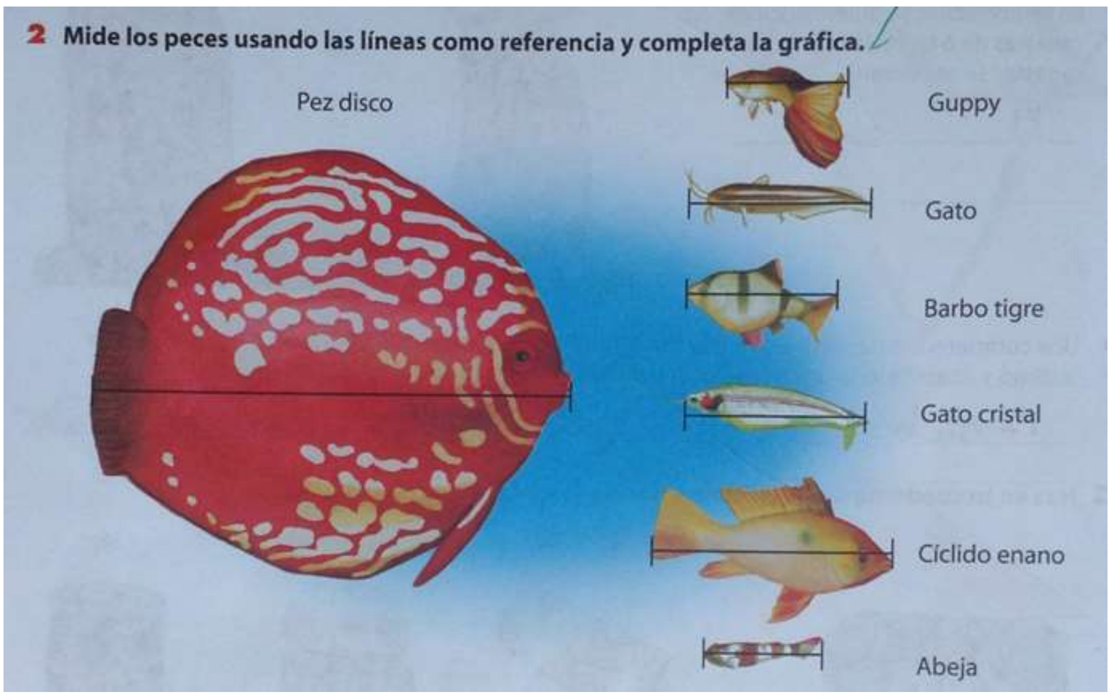

Figura 1. Medición de longitudes

En resumen, la problemática de determinar, para objetos que no son longitudinales, cuál es la distancia más conveniente para dar cuenta de su largo, se pasa por alto. Así la longitud se presenta de manera ostensiva, no se construye como un criterio que permite resolver ciertos problemas.

En cambio, en otras lecciones se percibe una intención de que los alumnos construyan cierta magnitud, es decir, la pongan de relieve, la separen de otras características de los objetos porque permite resolver determinado problema, como en la lección de primer grado (SEP, 2003, p. 19) que se muestra en las Figuras 2 y 3.

En la lección aparecen varias puertas y personas de alturas distintas y se pregunta ¿Quiénes pasan sin agacharse? La pregunta no tiene que ver directamente con ninguna longitud, pero la única manera de responder correctamente es considerando la altura de las personas y puertas, dejando de lado otras características como la vestimenta, el género o la edad. La posibilidad de recortar las personas permite trasladarlas para comparar su altura con la de cada puerta superponiéndolas. Estos problemas ayudan a que el alumno construya la noción de longitud.

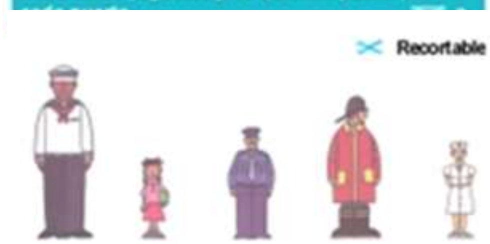

Figura 2. ¿Quiénes pasan sin agacharse? Figura 3. Material Recortable

Me interesa mostrar otra lección, también de primer grado (SEP, 2003, p.59), que aparece en la Figura 4. No hay una sola respuesta para la pregunta ¿quién es más grande? Si se considera la altura, el más grande es el venado. Si se considera el largo entonces la serpiente es la más grande. Además, las dos ardillas son casi iguales, pero en el dibujo aparecen en distinta posición, ¿debe considerarse la altura de la ardilla sentada, o el largo de la que está en el árbol? En el último caso, ¿se incluye o no el tamaño de la cola estirada? Es decir, aunque la lección no lo hace explícito, el problema supone la necesidad de acordar el criterio que se usará para determinar quién es más grande[4]. Se considera desde el diseño que la longitud no es una característica evidente, intrínseca a los objetos, a diferencia de la lección de los peces que mostré al inicio del apartado.

Me detendré a continuación en los distintos procedimientos para comparar superficies de manera directa, procedimientos que ayudan a conceptualizar esa magnitud. Elegí la superficie porque dichos procedimientos son más diversos que en las otras.

Cuatro maneras de comparar superficies antes de medirlas

Figura 4. ¿Es la ardilla la más chica?

La primera manera de comparar directamente superficies es a simple vista, como en la lección "las Tortugas" de primer grado (SEP, 2003, p. 16), en la que aparecen varias tortugas y se pide iluminar las ocho que tienen el mismo "tamaño". Este procedimiento tiene un uso limitado, pues funciona solo cuando las figuras no están muy alejadas y la diferencia de superficies es clara.

La segunda manera de comparar la superficie de distintas figuras sin medirlas es por superposición, que consiste en colocar una figura encima de la otra para ver si cabe dentro o la contiene. Este es el procedimiento que se prioriza en los libros de los setenta (SEP, 1972). Cuando ninguna de las dos figuras cabe completamente dentro de la otra y no es fácil saber a simple vista si los pedazos sobrantes se compensan en ambas figuras, se puede recortar alguna de las figuras para trazar de cubrir la otra con los pedazos. A esto se le llama recubrimiento. La figura recortada es mayor, menor o igual que la otra si al cubrirla sobran, faltan pedazos o la figura queda bien cubierta, respectivamente. Un ejemplo son las siguientes dos lecciones, "arreglos en el zoológico" de tercer grado (SEP, 2002, p. 66) que aparece en la Figura 5, y "¡A comparar figuras!" de primer grado (SEP, 2009, p. 97), Figura 6.

En ambas lecciones se trata de comparar superficies, y para hacerlo, se ofrece la posibilidad de recortar las figuras. Esta característica permite superponer, recortar y compensar. Y entonces permite definir equivalencia de superficies a partir del criterio “dos figuras tienen la misma superficie cuando una se puede transformar en la otra”. Cuando las figuras aparecen fijas en una lección y no se permite recortarlas, esta posibilidad se reduce: se pueden comparar figuras por simple vista o recurriendo a las medidas[5]. A pesar de las características en común de las dos lecciones, el tratamiento didáctico de ambas tiene diferencias importantes. En primer lugar, La lección “¡A comparar figuras!” no enmarca la comparación de superficies dentro de una problemática más amplia, simplemente se pide hacer esa comparación sin un propósito. En “Arreglos en el zoológico” se compara para poder ordenar, dentro de un contexto que hace sentido, el de las jaulas que deben asignarse a distintos animales. En segundo lugar, en la lección “¡A comparar figuras!”, la superposición para ver si una figura cabe en la otra no emerge como una estrategia puesta

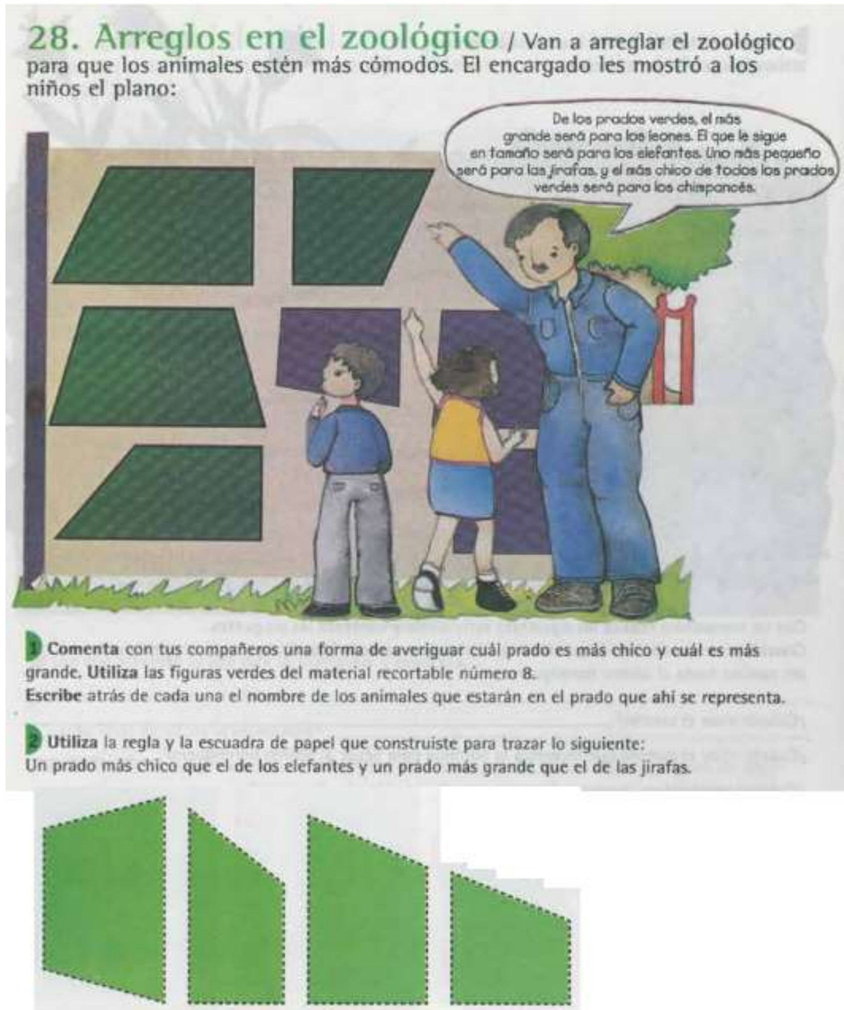

Figura 5. Arreglos en el zoológico

en juego por los alumnos para resolver un problema. El texto conduce al alumno, quien constata, no resuelve. En la lección “Arreglos del zoológico” el procedimiento no está dado de antemano, pero la resolución requiere que unas figuras se recorten para tratar de cubrir las otras. En tercer lugar, en la lección “¡A comparar figuras!” se trabaja con figuras más abstractas, más matematizadas que en “arreglos del zoológico”. En ésta las figuras representan prados y son irregulares. Esto es importante dada la tendencia a priorizar, desde las primeras experiencias, el cálculo de áreas de las figuras que tienen alguna fórmula, dejando de lado las otras figuras, como si no tuvieran superficie. Y finalmente, en cuarto lugar, en la lección “¡A comparar figuras!” sólo hay un problema que implica comparar directamente las figuras por superposición, y después se salta inmediatamente a problemas que apuntan al uso de unidades de medida. Se pasa por alto el procedimiento de recubrimiento. Es decir, se aborda la comparación directa de superficies, pero de manera muy rápida, para dar paso a la medición con unidades, desvaneciendo la posibilidad de lograr una mejor comprensión de la superficie.

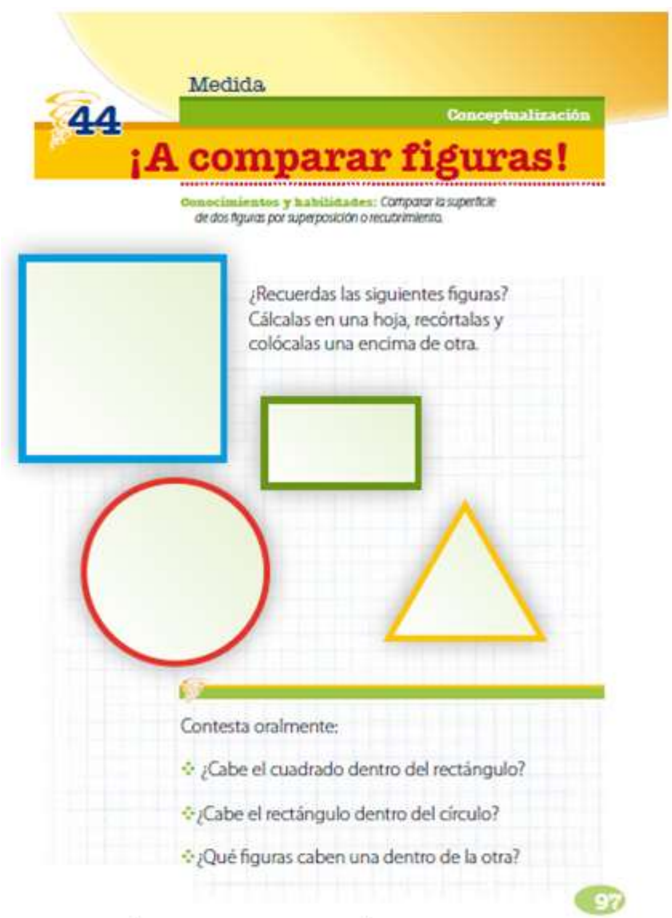

Figura 6. ¡A comparar figuras!

La tercera manera de comparar superficies de manera directa es con el uso de intermediarios. Sólo encontré este procedimiento en la propuesta oficial de 1993, y de manera tangencial. En la lección “Rompecabezas” de tercer grado (SEP, 2002, p. 174) se pide cubrir dos figuras con piezas de un rompecabezas, el tangram, y decidir cuál de las dos figuras tiene mayor área a partir de la comparación de las piezas utilizadas en cada figura.

Finalmente, la propuesta de 1970 contiene, en una sola lección, otra manera de comparar superficies de manera directa: por peso (SEP, 1974, p. 90). La lección describe el problema de una niña, Rosa, quien necesita saber cuál de dos pedazos de tela es “más grande”. Como no es fácil saber a simple vista, y Rosa no quiere cortar su tela, decide utilizar una balanza de platillos, pues “como las telas eran del mismo material, entonces el pedazo de mayor tamaño pesaría más”.

Los cuatro procedimientos anteriores –comparación por simple vista, superposición o recubrimiento, a partir de un intermediario, o por peso- permiten construir criterios de equivalencia de superficies que no pasan por el uso de unidades de medida, y ayudan a que los alumnos logren aceptar que al cambiar la forma de una figura, sin agregar ni quitar pedazos, se mantiene la superficie, es decir, que forma y superficie son independientes, aprendizaje considerablemente difícil de lograr (Douady, Perrin-Glorian, 1989). Los tres primeros son de carácter geométrico, ponen de relieve la idea de superficie como el espacio que ocupa una figura. Cuando la comparación directa de objetos a partir de cierta magnitud no es considerada, solamente puede recurrirse a la comparación a través de los resultados obtenidos por medición, es decir, comparando números, lo cual reduce significativamente la comprensión de dicha magnitud, provoca confusión entre distintas magnitudes y desconocimiento de la manera de medir las cantidades de cierta magnitud. En pocas palabras, es difícil interpretar los resultados de mediciones si no se tiene claro qué es lo que se ha medido. (Belmonte, 2005)

CONCLUSIONES

El análisis anterior muestra que poco a poco las propuestas curriculares han incluido el estudio de magnitudes, antes de medirlas. No obstante, aún hay varios retos por resolver.

Todavía en ocasiones se da por sentado que dichas magnitudes son ya conocidas por los alumnos –probablemente porque se asume que el contacto con ellas en contextos no escolares es suficiente para familiarizarse al menos con ciertas magnitudes-, o bien, se da un espacio a los problemas de comparación directa pero este trabajo se abandona pronto para dar paso al conteo de unidades, conversiones y fórmulas.

Un problema presente en todas las propuestas curriculares tiene que ver con la falta de articulación: valdría la pena repensar en qué momento conviene empezar a estudiar cada magnitud, lograr una nutrida y consistente diversidad de procedimientos para comparar al menos superficies de manera directa, y anticipar cuándo y de qué manera es pertinente y fructífero apoyar el estudio de otros contenidos en las magnitudes.

La construcción de criterios para comparar y ordenar objetos a partir de cierta magnitud favorecería una nutrida concepción de dichas magnitudes. Por ejemplo, una idea de superficie que no sólo remita a un número sino también a la cantidad de espacio ocupado, la claridad de que la superficie no depende de la forma ni del perímetro, la posibilidad de regular resultados obtenidos al usar las fórmulas.

NOTAS

1 No todas son magnitudes, pero son características de algunos objetos a las cuales puede asociarse una relación con el conjunto de números. Las propiedades de una magnitud se describen en Brousseau (2000)

2 El *korzec* es un recipiente que se utilizaba como unidad de medida de granos.

3 Esta cantidad varía entre cero y cuatro en el resto de los casos.

4 La longitud aglutina una diversidad de características de los objetos, como la altura, el grosor, la profundidad, de modo que se tienen muchos adjetivos: largo-corto, ancho-estrecho, grueso-delgado, alto-bajo, profundo-superficial, lejos-cerca. El adulto puede asociar esta multiplicidad de características a una misma magnitud: la longitud. Pero los niños necesitan resolver una variedad de problemas para lograrlo (Freudenthal, 1983).

5 “La costumbre de dar las superficies dibujadas y no recortadas favorece la identificación perímetro/superficie. Esta representación favorece la identificación de la superficie con el borde, permitiendo la confusión entre el objeto representado y el contenido de la representación”. (Chamorro 2005, p.229)

REFERENCIAS

Belmonte, J.M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en educación infantil. En Chamorro, M.C. (Ed.) *Didáctica de las matemáticas. Colección Didáctica. Preescolar.* Madrid: Pearson Educación.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *9*, 21-30

Chamorro, M.C. (2005). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M.C. Chamorro (Ed.). *Didáctica de las matemáticas. Colección Didáctica. Primaria.* Madrid: Pearson Educación.

De Agüero, M. (2006). *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matemáticas de la vida cotidiana*. México: CREFAL, Universidad Iberoamericana.

Douady, R., Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 387-424.

Freudenthal (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Holanda: Reidel Publishing Company.

Kula, W. (1998). *Las medidas y los hombres.* México: Siglo XXI Editores.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (1972) *Matemáticas. Tercer grado.* México: Feder, S., Filloy, E., Gitler, S., Gorostiza, L., Imaz, C., Rivaud, J.

SEP (1974) *Matemáticas. Cuarto grado.* México: Filloy, E., Gorostiza, L., Imaz, C., Rivaud, J.

SEP (2002). *Matemáticas. Tercer grado.* México: Ávila, A., Balbuena, C. (coords.)

SEP (2003). *Matemáticas. Primer grado.* México: Block, D., Fuenlabrada, I.

SEP (2009). *Matemáticas. Primer grado.* México: Martínez, M.C., González, A. (coords.)

SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Segundo grado.* México: Rosales, M. (coord.)

SM Ediciones (2006). *Brújula 3. Programa para el desarrollo de competencias escolares. Serie Saberhacer.* México: Cervantes, N., Martínez, J., Sánchez, J.