



PROFESORES EN FORMACIÓN Y EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIÓN LOGARÍTMICO-EXPONENCIAL

Manuel Trejo Martínez

Universidad Autónoma de Guerrero-Facultad de Matemáticas

Marcela Ferrari Escolá

Universidad Autónoma de Guerrero-Facultad de Matemáticas

Área temática: Procesos de Formación.

Línea temática: Procesos formativos de alumnos, profesores, académicos, supervisores, directivos (niños, adolescentes, jóvenes).

Resumen:

En el presente estudio discutimos acerca del desarrollo del razonamiento covariacional en futuros profesores de matemáticas. Reportamos las acciones mentales y niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial desarrollados por estudiantes de la licenciatura en matemáticas (sexto semestre, Equipo 2) durante un experimento de enseñanza. Las tareas del experimento de enseñanza requieren de una construcción geométrica de puntos de una curva utilizando para ello GeoGebra, el cual permite que los estudiantes exploren las variaciones y describan la curva que se ajusta los puntos. El equipo 2 logra reconocer las dos progresiones (aritmética y geométrica) sin llegar a determinar una expresión algebraica. Hemos notado la complejidad de desarrollar un razonamiento covariacional continuo a partir de una tarea que incentiva el razonamiento covariacional discreto..

Palabras clave: Razonamiento covariacional, Experimento de enseñanza, Geometría dinámica, Construcción geométrica.

1. Introducción

El razonamiento covariacional es considerado como una forma fundamental del razonamiento matemático de estudiantes que utilizan cuando se aprende el concepto de función (Johnson, McClintock & Hornbein, 2017). Para Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002) el razonamiento covariacional es entendido como actividades cognitivas donde se involucra la coordinación de la variación de dos cantidades atendiendo la forma en que cada una cambia en relación a la otra. En este sentido, existen dos perspectivas de covariación: una estática y otra dinámica. De manera general, desde la perspectiva estática las cantidades de una variable se asocian con las cantidades de otra variable; en tanto que desde la perspectiva dinámica los cambios en una variable están asociados con cambios en otra variable (Johnson, 2012).

Particularmente Confrey y Smith (1994) proporcionan una perspectiva de covariación estática de una función cuando se toma como una yuxtaposición de dos progresiones, cada una generada independientemente a través de patrones de datos, evidencia que emerge de su estudio sobre la función exponencial. En tanto que Carlson et al. (2002) trabajan desde una perspectiva dinámica que parte de interpretar y representar modelos gráficos, entre otros, el llenado de recipientes.

Se ha demostrado que el razonamiento covariacional es fundamental para que los alumnos comprendan numerosos conceptos matemáticos en nivel bachillerato y superior; como son las relaciones exponenciales (Castillo-Garsow, 2010; Confrey & Smith, 1995; Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, & Amidon, 2016; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams, & Amidon, 2012; Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra, & Méndez-Guevara, 2016), en trigonometría y las funciones trigonométricas (Moore, 2010, 2012, 2014), la razón de cambio (Johnson, 2012, 2015a, 2015b), el concepto de función (Carlson et al., 2002; Johnson, 2012, 2015a, 2015b), el teorema fundamental del cálculo (Thompson, 1994b), gráficos de funciones (Carlson et al., 2002; Moore, Paoletti, & Musgrave, 2013) y ecuaciones diferenciales (Castillo-Garsow, 2010).

Ferrari-Escolá, et al. (2016), resaltan dos formas de aproximar a la función exponencial. La primera aproximación hace referencia al trabajo de Thompson (2008), Ellis et al (2012), y Castillo-Garsow (2010) sobre razón de cambio donde se considera que la tasa proporcional en la cual una función cambia con respecto al valor de la función, en un determinado instante, es una característica que define a las exponenciales. La segunda forma de aproximación reconoce que la función exponencial puede ser vista como la yuxtaposición de dos progresiones cada una de ellas construidas de manera independiente a través de análisis numéricos e identificando patrones (Confrey & Smith, 1994). A partir de la segunda aproximación podemos pensar en construir la función logaritmo y la función exponencial desde el mismo razonamiento covariacional el cual surge al considerar ambas funciones como la yuxtaposición de dos progresiones una aritmética y otra geométrica, bajo la misma mirada de Napier y Briggs que, a principios del siglo XVII, buscaban un herramienta para facilitar cálculo; en tanto que Newton, Huygens y Agnesi, a finales del mismo siglo, se enfocan a describir fenómenos (Ferrari & Farfán, 2010).

Las investigaciones anteriormente señaladas dejan ver la importancia en desarrollar en estudiantes y/o en profesores el razonamiento covariacional, como lo menciona Thompson y Carlson (2017), la covariación es cognitiva ocurre en la mente de las personas y eso implica que la cuestión es cómo los estudiantes y profesores conciben una situación que el investigador propone como una que involucra covariación. Por ello proponen ciertos temas que son foco de futuras investigaciones, tales como, el desarrollo de un razonamiento covariacional continuo suave, las experiencias de maestros que no razonan covariacionalmente y que, sin embargo, son llamados a apoyar a los estudiantes a desarrollar dicho razonamiento, entre otras.

Lo anterior nos llevó a una investigación donde invitamos a futuros profesores de matemáticas en cuarto y último año de su carrera profesional a participar en un estudio sobre el razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, en una perspectiva estática de covariación en caminata hacia una perspectiva dinámica mediante la construcción geométrica de puntos con el software GeoGebra, el uso de tablas y hojas de cálculo, así como la graficación o ajuste de puntos.

La pregunta de investigación que nos guió fue: ¿Qué niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial se perciben en dos futuros profesores de matemáticas?

2. Aspectos teóricos

De acuerdo a Carlson, et al. (2002), el razonamiento covariacional es entendido como las actividades cognitivas individuales involucradas para coordinar la variación simultánea de dos cantidades al reflexionar sobre la variación que existe entre ambas. Señalan que si se quiere determinar la capacidad que tiene un individuo de razonar covariacionalmente se debe analizar, en conjunto, los comportamientos y las acciones mentales (AM) exhibidos al responder tareas específicas de covariación. Para estos investigadores, un estudiante se coloca en cierto nivel de acuerdo a la imagen global que apoya las diversas acciones mentales exhibidas durante las tareas de covariación. En su marco conceptual de covariación consideran cinco niveles de desarrollo. Señalan que la habilidad de razonar covariacionalmente alcanza un nivel de desarrollo cuando mantiene las acciones mentales asociadas a los niveles inferiores. La imagen que describe los niveles es caracterizada por Thompson (1994a), como aquello que se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales (p. 231). Es importante mencionar que el razonamiento covariacional es más sofisticado en medida en que la imagen se va desarrollando.

En ese sentido Ferrari-Escolá, et al. (2016) proponen una reformulación (Tabla 1) de los niveles descritos por Carlson et al. (2002), pues el objetivo de su investigación era identificar el razonamiento covariacional logarítmico-exponencial de estudiantes de bachillerato desde un acercamiento discreto hacia un análisis continuo de la función logarítmica. Reformulación que utilizamos para nuestra investigación como marco conceptual.

Tabla 1: Razonamiento covariacional logarítmico-exponencial (tomado de Ferrari-Escolá, et al., 2016)

AMI.Coordinación entre los números. Reconocer orden y secuencia en cada progresión.	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 2	Nivel 4	Nivel 5
	Se percibe cuando se trabaja con los elementos de construcción de los puntos y se reconoce el orden de los elementos de las progresiones.	Implica reflexionar sobre AM1 e incorporar AM2 mientras se trabaja en cómo cambian las cantidades involucradas.	Implica reflexionar sobre AM1 e incorporar AM2 mientras se trabaja en cómo cambian las cantidades involucradas.	Incorporar AM4 refuerza el nivel anterior al reconocer nuevas acciones y propiedades sobre objetos a través de la construcción de nuevos puntos de	Coordinar las acciones mentales anteriores con AM5, promueve internalizar y coordinar acciones sobre progresiones y operaciones aritméticas que conducen a la covariación logarítmica-
MA2. Coordinación de la dirección de la cantidad del cambio en cada progresión numérica. Identificar si la progresión aumenta o disminuye al reconocer operaciones aritméticas entre números y, por lo tanto, el cambio aritmético (diferencia) y el cambio geométrico (cociente).					
MA3. Coordinación de las operaciones aritméticas que generan las progresiones. Esto implica la asociación de la multiplicación con la suma como la operación que permite la construcción de puntos de la curva.					
MA4. Coordinación de las operaciones que completan las progresiones numéricas al extender el conjunto de números naturales al racional, y el conjunto de números racionales al real, para obtener la reversibilidad de las operaciones.					
MA5. Coordinación de las progresiones. Implica relacionar una coordenada de un punto con la otra coordenada el mismo punto, es decir, abstraer la relación funcional de forma numérica, gráfica o algebraica.					

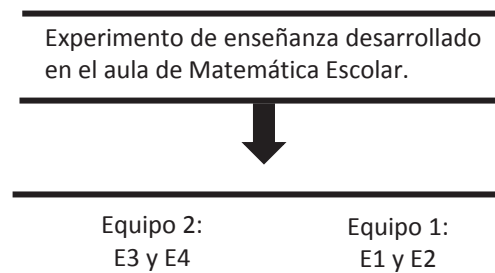
3. Metodología

Dada la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje y la necesidad de una metodología sensible a ellos consideramos, adecuada para nuestra investigación, la metodología de investigación basada en diseño. Según Molina, Castro, J. Molina y E. Castro (2011) es una metodología cualitativa que “persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico” (p.75). Para Molina et al. (2011) el objetivo de esta metodología es “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación” (p. 76).

3.1. Participantes y contexto

En el experimento de enseñanza participan cuatro jóvenes, de entre 22 y 24 años, tres hombres y una mujer, inscritos en el curso Matemática Escolar. Dentro de la trayectoria escolar de los participantes encontramos asignaturas de formación básica como: Álgebra lineal (I al III), Geometría, Geometría Analítica (I y II), Cálculo (I al IV), Análisis Numérico I, entre otras. Su formación de especialidad en matemática educativa marca como asignaturas cursadas al momento de su participación: Tecnologías en la Matemática Educativa, Historia de las Matemáticas, Análisis del Sistema Educativo, Metodología de la enseñanza, por mencionar algunas.

Esquema 1: Organización de la investigación



3.2. Recolección de datos

Los cuatro participantes fueron distribuidos en dos equipos (Equipo 1 y Equipo 2), de dos integrantes (E1 y E2; E3 y E4). En las dos sesiones se trabajó sobre logaritmos, cuyo detonador fue la construcción geométrica de una curva logarítmica. Estas sesiones se desarrollaron en el aula del laboratorio de modelación de la Facultad de Matemáticas en Acapulco. El equipo de investigación estuvo integrado por: un estudiante de octavo semestre (B) quien funge como coordinador de la actividad, tres testigos encargados de tomar notas de campo y dos auxiliares que videograbaron las sesiones.

Para la toma de datos se contó con tres videocámaras, dos de ellas se ocuparon para grabar la actividad de los dos equipos participantes, la tercera tuvo la función de grabar la actividad general del salón de clases a cargo de uno de los testigos. De igual manera se registraron las grabaciones de pantalla desde los equipos de cómputo utilizados para evidenciar el trabajo realizado en el software. También se recabó, al término de cada sesión, los archivos “. ggb” generados en GeoGebra. Se rescataron los archivos de audio de cada sesión, así como las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo de los testigos.

Se presenta en este escrito, luego del análisis de los datos obtenidos, algunos elementos sobre las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial percibidos en estudiantes del Equipo 2 (E3 y E4) mientras desarrollan las tareas en el experimento de enseñanza.

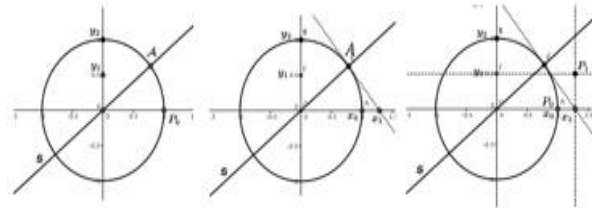
3.3. Tareas

De esta manera, el diseño estuvo constituido por dos actividades que se encaminan hacia la construcción geométrica de puntos pertenecientes a la función logaritmo base 2, para lo cual se utilizó GeoGebra. La dinámica de clases organizada por B fue:

1. Iniciar la sesión con las instrucciones de trabajo para guiar a los estudiantes en la construcción geométrica de puntos de la curva (Fig. 1);

Fig. 1. Construcción de los primeros puntos

- Particionar el eje y : $y_0=0$; $y_1=0.5$; $y_2=1$; $y_3=1.5$ y $y_4=2...$
- Insertar una circunferencia unitaria cuyo centro sea el origen del sistema de coordenadas cartesianas y la cual determina el punto $P_0 = (1, 0)$.
- Trazar una línea recta (s) que pase por el origen y un punto A (cualquiera) de la circunferencia (Figura 1).
- Trazar una recta tangente a la circunferencia por el punto A y determinar x_1 (Figura 2).
- Trazar una recta vertical por x_1 y una recta horizontal por y_1 determinar el punto P_1 (Figura 3).



2. Dar tiempo a los participantes para construir más puntos de manera independiente; analizar variaciones en datos e intentar ajustar la curva; identificar las variables en juego y su comportamiento “variacional”; percibir la covariación existente y ajustar una curva a dichos puntos; tareas que serían orientadas mediante preguntas preparadas para incentivar la discusión (Tabla 2);

Tabla 2: Preguntas guía del diseño de aprendizaje

No. de pregunta	Preguntas	Consideraciones
.1	¿Qué forma creen que tiene la curva que pasa por todos los puntos construidos? Dibujarla y explicar sus ideas.	Se espera que los estudiantes realicen un primer esbozo de la curva, sin ser exactos, ya que sólo se consideran puntos en el primer cuadrante del plano. Esto los llevaría a percibir la forma de la curva e imaginarla continua.
.2	¿Cómo se comportan los puntos construidos de la curva?”	Se espera una descripción en base a la observación de puntos, como por ejemplo, son crecientes, decrecientes, están ubicados en cierto cuadrante, etc. que daría indicios de AM1 y AM2
.3	¿Cuánto cambian las variables involucradas?”	Se espera que reconozcan, en primer lugar, las variables en juego, y luego trabajen con el comportamiento numérico, para poder determinar los patrones de crecimiento de las dos progresiones en juego. Evidenciarían mayor uso de AM1 y AM2, fortaleciendo tácitamente los niveles 1 y 2.
.4	¿Consideran que el punto “B” pertenece a la curva? ¿Por qué?	Se espera que reconozcan un punto especial de la curva $(1, 0)$, el cual les permitiría explorar o reconocer algunas características importantes de la función en juego y quizás estabilizar AM3.
.5	¿Se pueden encontrar puntos de la curva a la izquierda del punto “B”? Expliquen por qué y de ser necesario den ejemplos	Se espera que esta pregunta ayude a romper esquemas que pudieran haber sido establecidos referente al tipo de función que se está trabajando, ya que con la ubicación de más puntos se hacen visibles la asíntota de la función logaritmo base 2. Exige también esta tarea la reversibilidad (AM4)
.6	¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, lograr una curva que pase por todos ellos ¿cuál será?”	Se espera que con el análisis cuantitativo desarrollado en la pregunta 3 y las características visuales encontradas en las preguntas 4 y 5, identifiquen la covariación de ambas progresiones en juego, y así identifiquen la covariación logarítmica-exponencial inmersa y enunciar la curva logaritmo en base 2, lo cual evidenciaría la AM5.

3. Finalizar cada sesión invitando a los estudiantes a presentar los avances de manera plenaria donde el profesor cuestionará algunos aspectos con el fin de profundizar y reforzar el trabajo realizado.

3.4. Análisis de datos

El análisis de los datos se realizó de manera retrospectiva lo cual nos permitió reflexionar sobre los datos obtenidos durante todo el experimento de enseñanza (Molina, et al. 2011).

Se inició el proceso de familiarización con los datos a través de mirar, en repetidas ocasiones, los vídeos recabados, incluso se realizó una mejora en el audio eliminando ruido de las grabaciones mediante las herramientas proporcionadas por el software Audacity ®. Seguido de ello se realizó la transcripción de las grabaciones de vídeo; se revisaron y digitalizaron las hojas de trabajo resultantes de las sesiones; se revisó la construcción hecha en GeoGebra y la grabación de la pantalla recabada, elementos que nos ayudó a entender, de mejor manera, cómo fueron elaborados cada uno de los elementos geométricos de la construcción en GeoGebra.

Para analizar los datos nos apoyamos en el marco conceptual de covariación logarítmico-exponencial expuesto en Ferrari-Escolá, et al. (2016). Con las transcripciones completas los autores identifican, por separado, momentos donde se vislumbran en los estudiantes aspectos covariacionales o elementos relacionados al crecimiento, o variación de las variables en juego, para luego triangular y validar los episodios escogidos como evidencia de las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional percibidos en la primera sesión del experimento de enseñanza.

4. Resultados

El experimento de enseñanza inicia con la explicación de B para la construcción de dos puntos ($P_1=(1.42, 0.5)$ y $P_2=(2, 1)$) de la curva a analizar. Esta actividad tuvo una duración aproximada de 23 minutos, pues fue necesario instruir a los estudiantes en las herramientas básicas de GeoGebra que se utilizarían. Después de eso, se les solicita construir más puntos y analizarlos hasta lograr reconocer la curva.

Luego de las explicaciones del coordinador y la construcción de los dos primeros puntos, E3 y E4 acuerdan construir más puntos, utilizando aproximadamente 19 minutos en esa tarea (Fig.2).

Fig. 2. Construcción de puntos realizados por el equipo 2

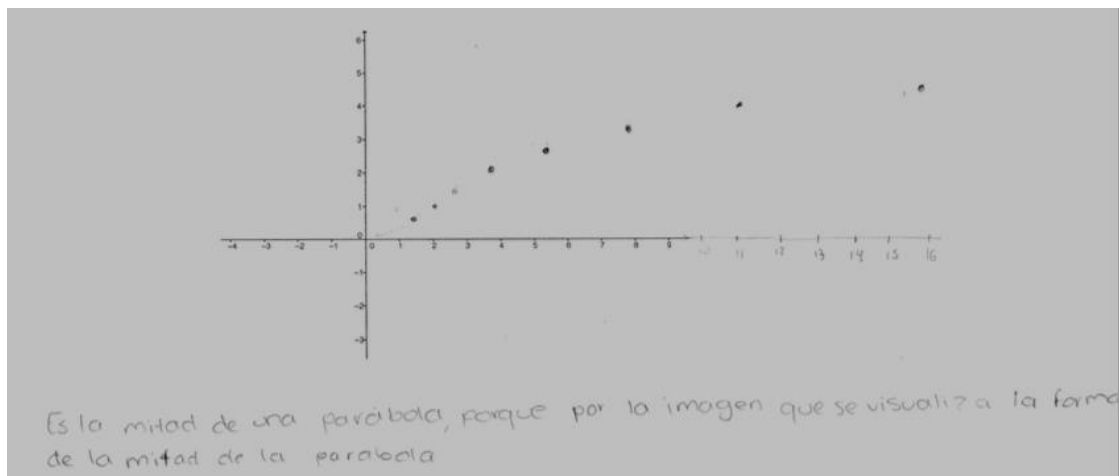
- $P_1 = (1.41, 0.5)$
- $P_2 = (2, 1)$
- $P_3 = (2.83, 1.5)$
- $P_4 = (4, 2)$
- $P_5 = (5.66, 2.5)$
- $P_6 = (8, 3)$
- $P_7 = (11.31, 3.5)$
- $P_8 = (16, 4)$
- $P_9 = (22.63, 4.5)$

E3 argumenta que mientras más puntos tuvieran podrían hacer una mejor estimación de la curva en cuestión, lo cual no se vió reflejado al termino de la sesión.

4.1. Tiene forma de parábola acostada

Las primeras preguntas de la actividad giran entorno a la forma y al comportamiento general de los puntos trazados. En ese sentido el equipo 2 deduce a partir de la observacion de los puntos construidos que la curva representa a una parábola acostada y que tiene un comportamiento creciente. Esto se puede ver en la Fig. 3.

Fig. 3. Es una parábola creciente



4.2. Las variables involucradas, cómo y cuánto cambian

Respecto a las preguntas sobre cuánto es el cambio en las variables, el equipo rescató que las variables involucradas fueron "x" e "y" las cuales estaban determinando los puntos construidos, del mismo modo argumentaron que los valores pares de "x" crecían el doble (Tabla 2).

Tabla 2. Conversación del equipo 2 referente a la cuantificación del cambio

B: ¿cuales son las variables, ver cuánto cambia? ¿Cómo puedes saber eso?

E3: Hay que ver la distancia, jajajaja

E4: ¿Cuál, cuál?

E3: Las variables, cómo cambian las variables involucradas que son "x" e "y"

E4: ¿Cuál el "P"?

B: Si, son los puntos de la curva ¿cuánto cambian, cómo pueden saberlo?

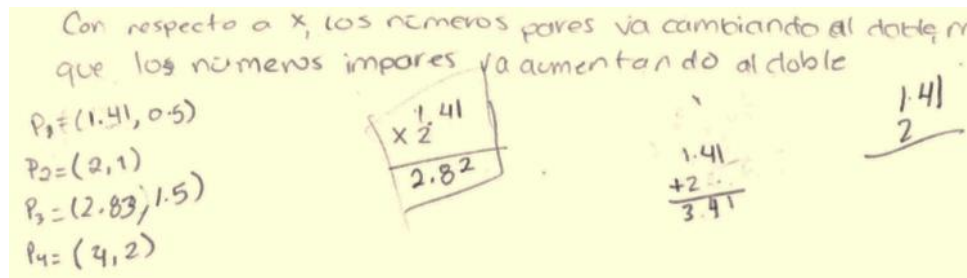
E4: El doble

B: ¿Por qué dices que el doble?

E4: No sé. De los primeros si tomamos como aquí respecto al eje en los pares va aumentando el doble, por ejemplo aquí del 2 al 4, 8 16, ... respecto a la circunferencia.

Referente a los valores “impares” el equipo concluye que deben tener el mismo comportamiento que los pares, es decir que los valores se van a ir duplicando, por ejemplo 1.41 al doble sería 2.82.

Fig. 4. Los números impares van aumentando el doble.



Esta idea de duplicar también los valores impares no fue considerada hasta el final, debido a que existía una diferencia entre los valores que tenían en los puntos y los que se iban obteniendo al duplicar. Hasta el momento podemos observar que reconocen la variación y la dirección de las variables en juego logrando iniciarse en AM1 y AM2.

5. Conclusiones

Al inicio del experimento los estudiantes van contruyendo puntos de la curva e intentan indentificar el tipo de variación que observan en las variables, la observación los lleva a pensar que se trata de una parábola acostada. Percibimos allí indicios de AM1 y de AM2, ya que consideran que los puntos son crecientes. Perciben la multiplicación por 2 pero solo para los puntos con valores pares. De acuerdo con Gruver (2017) existe una dificultad en diferenciar las relaciones lineales de las exponenciales y el cómo crecen. Intentan hacer lo mismo para los valores impares pero argumentan no lograrlo debido a algunos decimales de diferencia.

Durante la primer parte del experimento de enseñanza E3 y E4 se enfocan en determinar cómo obtener el siguientes puntos de la curva apoyándose en Geogebra. Con este tipo de trabajo fue complicado lograr coordinar las operaciones aritméticas (al menos para los números naturales) de multiplicar por 2 y sumar 1, esto no les permitió generar las progresiones para “x” y “y”.

Los estudiantes evidencian fragilidad en estrategias algebraicas ya que su análisis estuvo basado en la observación y construcción geométrica de puntos. También observamos poco análisis numérico ya que nuestro diseño de aprendizaje pretende desde construcciones geométricas provocar exploraciones generadoras de razonamiento covariacional en estudiantes, dándoles la posibilidad de probar sus conjeturas numéricas al predecir nuevos puntos de la curva estudiada.

Referencias

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(5), 352–378.

Castillo-Garsow, C. (2010). Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth. Tesis doctoral no publicada. Tempe, AZ: Arizona State University.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 135–164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.

Dennis, E. & Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington D.C., USA: Mathematical Association of America.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(3), 151–181.

<http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090>

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., y Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados-IPN. México.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(4), 59–68

Ferrari-Escolá, M, Martínez-Sierra, G. & Méndez-Guevara, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior* 42, 92–108.

Gruver, J. (2017). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. *Journal of Mathematical Behavior* 50, 1–22

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), pp. 313–330.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001>

Johnson, H. L. (2015a). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 37–41.

<http://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946>

Johnson, H. L. (2015b). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*.

<http://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y>

Johnson, H.L., McClintock, E. y Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education* 49(6), 851–864.

<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4>.

Kuper, E. G. & Carlson, M. (2018). Sparky the Saguaro: A Teaching Experiment Examining a Student's Development of the Concept of Logarithms. En A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, y S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.441-449), San Diego, California

Méndez, M. (2013). Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias* 29(1), 75–88.

Moore, K. C. (2010). The role of quantitative reasoning in precalculus students learning central concepts of trigonometry. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University.

Moore, K. C. (2012). Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. En R. Mayes, & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: a driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 75–92). Laramie, WY: University of Wyoming Press.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102–138.

Moore, K. LaForest, K. & Kim, H. (2016). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics* 92(2), 221-241. DOI 10.1007/s10649-015-9671-6.

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 461–473.

<http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002>.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education – North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Thompson, P. W. (1994a). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education I* (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 229–274.

<http://doi.org/10.1007/BF01273664>.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sépulveda (Eds.), *Plenary paper delivered at the 32nd annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 31–49). México: Morelia.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.