



XVI
Congreso Nacional de
Investigación Educativa
CNIE-2021

Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales por medio de una tarea mediada por hoja de cálculo

Fredy Peña Acuña

Cinvestav (IPN)

fredy.pena@cinvestav.mx

Área temática 18. Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en educación.

Línea temática: Innovación educativa y tecnología digital.

Tipo de ponencia: Intervenciones educativas sustentadas en investigación.



Resumen

Se presentan un modelo de enseñanza para introducir los sistemas de ecuaciones lineales en el estudio del álgebra. Se hace uso de hojas de cálculo para dar sentido a la introducción de la sintaxis algebraica y solventar errores comúnmente encontrados en los procesos de adquisición del lenguaje algebraico. Para el diseño de la propuesta se utilizó el marco de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, Rojano, Puig y Rubio, 1999) y la postura de Werner Blum (Blum y Borromeo, 2016) para la modelización matemática en contextos educativos. Los resultados muestran un gran potencial de las tareas de modelización para la construcción de significados asociados a los sistemas de ecuaciones lineales, además se resalta el papel de la hoja de cálculo como puente entre referentes concretos (provenientes del contexto) y abstractos (el lenguaje algebraico).

Palabras clave: Álgebra, Modelos Matemáticos, Tecnología.

Introducción

Diversos autores coinciden en que un enfoque operatorio como el que tradicionalmente se ha dado a la enseñanza del álgebra conduce a grandes fracasos en su aprendizaje. Kieran (1997) y Mason, Graham, Pimm y Gowar (1999) señalan que una de las razones de este fracaso es la exigencia a los estudiantes de que apliquen reglas sintácticas definidas sobre objetos de los que no tienen una comprensión siquiera superficial. Sin embargo, Manson y sus colaboradores señalan que permitir que el álgebra se origine en las necesidades de representación de situaciones posibilita que los estudiantes extraigan ideas del mundo que los rodea, a fin de modelarlo matemáticamente y de esta manera entenderlo mejor (Mason et al, 1999).

En el presente documento se parte de reconocer el álgebra como una herramienta que posibilita la representación matemática de situaciones y fenómenos, y la construcción de modelos matemáticos formales; éstos, así como, las gráficas cartesianas, las tablas de variación entre otros, permiten conjeturar comportamientos de los fenómenos estudiados, validar soluciones, interactuar y confrontar resultados y técnicas. En este sentido, el álgebra es una herramienta de modelización que permite sintetizar las relaciones entre las variables con las que se modela un fenómeno y realizar deducciones sobre éste por medio de una serie de transformaciones de orden sintáctico (Rojano, 2014; Sadovsky, 2005).

La hoja de cálculo en esta propuesta se considera un medio que permite la representación de las relaciones que se extraen del contexto de un problema y matematizar, con una sintaxis propia, estas relaciones. Se reconoce que la sintaxis que usa la hoja de cálculo y la sintaxis algebraica tradicional difieren considerablemente, no obstante, se considera la hoja de cálculo como un punto intermedio entre los referentes concretos y aritméticos que el problema propone, y la representación algebraica convencional, necesaria para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, los cuales son el objeto matemático que compete a este estudio.

Con el objetivo de *analizar los procesos de producción de sentido y construcción de significados en el aprendizaje de la sintaxis algebraica mediada por actividades de modelización matemática*, se diseñó una secuencia de actividades (modelo de enseñanza) que involucran el uso de una hoja de cálculo y un contexto proveniente de la realidad. Esta actividad fue aplicada a estudiantes de segundo grado de secundaria sin experiencia previa en este tipo de tareas. Esto en el marco de la realización de una investigación de doctorado.

A continuación, se presenta un modelo de enseñanza que introduce el *método de igualación* para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, se describen los resultados de su aplicación y se ofrecen algunas reflexiones sobre su uso en la escuela.

Los Modelos Teóricos Locales (MTL)

Los MTL (Filloy et al., 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008) surgen como una alternativa teórica que permite el estudio del actuar de los estudiantes en diferentes Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) a medida que se van acercando a un uso competente de los mismos. Los MTL proponen enfocar el objeto de estudio en cuatro componentes:

- *Modelos de Competencia Formal*
- *Modelos de Enseñanza*
- *Modelos de Procesos Cognitivos*
- *Modelos de Comunicación*

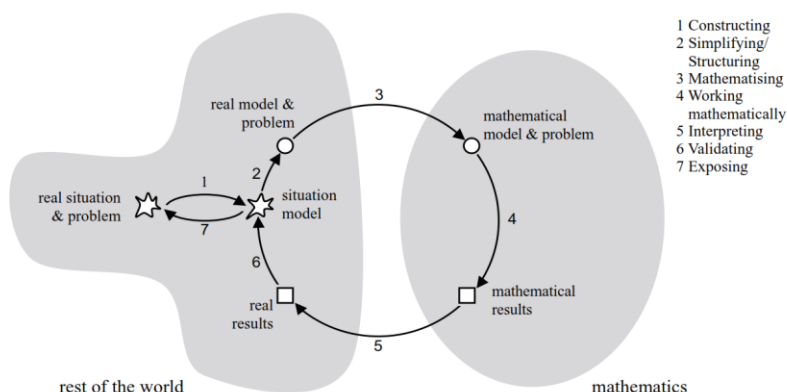
Los Modelos de Competencia Formal brindan un análisis fenomenológico puro del objeto matemático de estudio (Freudenthal, 1983) que involucra no solo el conocimiento matemático formal si no también las representaciones, usos y aplicaciones que éste ha tenido a lo largo de la historia. En el caso de este estudio son los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas el tópico central del Modelo de Competencia Formal.

Para el caso de los Modelos de Comunicación, y de Procesos Cognitivos, en este estudio fueron usados para el análisis del actuar de los estudiantes, esto en el marco del desarrollo de la tesis doctoral que enmarca el estudio. Sin embargo, para efectos de la elaboración de este escrito, conviene centrar la atención en el desarrollo del Modelo de Enseñanza, teniendo en cuenta las pautas para su diseño y los resultados de su aplicación que son favorables en contextos educativos convencionales.

Un modelo de enseñanza grano a grano

La secuencia de actividades que se plantea como modelo de enseñanza en este estudio fue diseñada tomando como referente los criterios para la elaboración de “buenas tareas” de modelización matemática para los grados de secundaria, propuestos por Blum y Borromeo (2016, p.72), quienes plantean que este tipo de tareas deben ser: *abiertas*, suficientemente *complejas*, *realistas* o *auténticas*, *problemáticas*, *accesibles* y que los estudiantes transiten por *todas las fases* del ciclo de modelización matemática que ellos proponen (ver Figura 1).

Figura 1. Ciclo de modelización Blum y Borromeo (2016)



Es importante resaltar que el modelo de enseñanza que se diseñó para este estudio no retoma al pie de la letra los criterios propuestos por Blum y Borromeo (2016), sino que los reelabora desde la perspectiva teórica de los MTL (Filloy, 1999) para cumplir con el objetivo de promover que los estudiantes se apropien de un nuevo SMS y que se enfrenten a actividades de modelización con las que han tenido poca o nula experiencia. Por lo anterior, no es posible que durante la secuencia los estudiantes transiten por “todas las fases” del ciclo de modelización, por el contrario, se planteó una secuencia que pone distintos énfasis en el ciclo de modelización a lo largo de su desarrollo.

Se consideró pertinente dividir la secuencia de actividades en tres hojas de trabajo con intereses concretos. Para este escrito conviene realizar una descripción de las dos primeras hojas de trabajo.

Hoja de trabajo 1: constituye el acercamiento inicial de los estudiantes a problemas que establecen dos incógnitas a encontrar y dos “condiciones” que estos valores deben cumplir de manera simultánea. Era necesario entonces proporcionar un contexto en el que las dos incógnitas y las dos condiciones fueran suficientemente explícitas. Se utilizó un contexto de mezcla de productos, considerando que las incógnitas corresponden a las cantidades de cada producto que se deben mezclar y que las condiciones de cantidad de producto y costo por kilogramo determinan las formas en las que los datos y las incógnitas interactúan.

El problema que se planteó es el siguiente:

Cacahuates y Nuez: El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de \$40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de \$120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de \$60 por kilo.

Seguido al problema, la hoja de trabajo propone una serie de instrucciones que buscan que los estudiantes plasmen en una hoja de cálculo prediseñada (únicamente con rótulos para las columnas) las relaciones que

encuentran entre los datos del problema. Las instrucciones que se establecen se presentan en forma de globos como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Fragmento de la hoja de trabajo 1 para la construcción de la hoja de cálculo

3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de los cacahuates	Costo de la nuez	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4						

En esta celda coloca el valor para la cantidad de nuez que crees que necesitará

En esta celda coloca el valor para la cantidad de cacahuete que crees que necesitará

Las instrucciones posteriores a la elaboración de la hoja de cálculo incitan a los estudiantes a reflexionar sobre las fórmulas que usaron, a perfeccionarlas (incluyendo una fórmula para los kilos de cacahuete dada la cantidad de kilos de nuez) y, finalmente a explorar más valores (ver Figura 3), esto con el objetivo de que encuentren una respuesta concreta y lo más acertada que se pueda para el problema.

Figura 3. Fragmento de la hoja de trabajo 1 para la búsqueda de la respuesta al problema

3	Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
4	1	24	40	2880	2920	116,8

Si con el valor que pusiste en esta celda no llegaste a la solución del problema, puedes usar las filas inferiores para probar otras posibilidades

Puedes seleccionar las celdas que contienen fórmulas y usar el cuadro de la esquina inferior derecha para replicar los cálculos en las celdas inferiores

Esta primera hoja de trabajo plantea uso de nueva simbología matemática y tiene énfasis en la consolidación de un método de exploraciones sucesivas como estrategia para abordar problemas de los que no se reconoce aún un método algebraico particular.

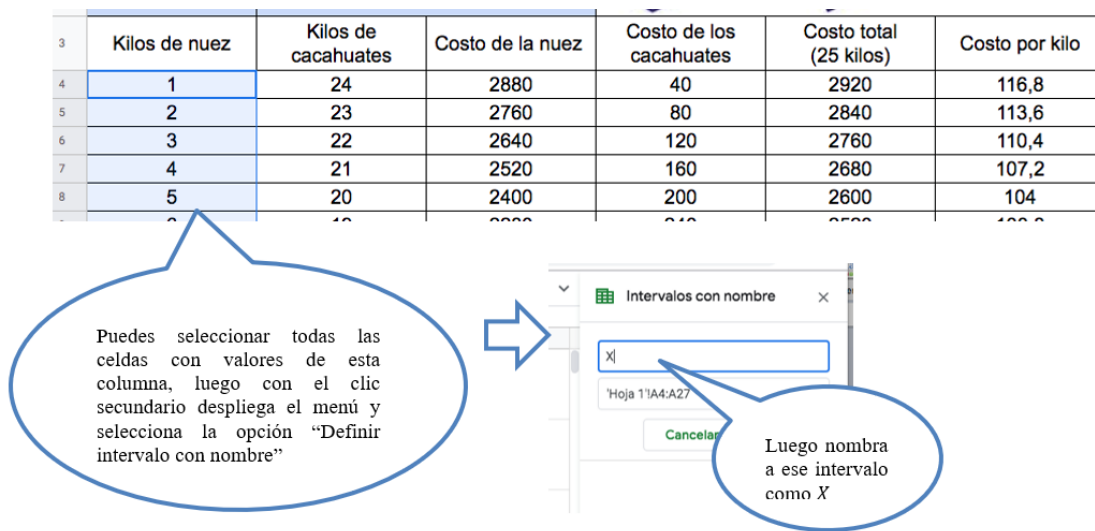
Hoja de trabajo 2: tiene como principal objetivo introducir el método algebraico de *igualación* para la solución de los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, se propone una primera sección de trabajo en la que los estudiantes resuelven dos problemas similares al de la hoja de trabajo 1. Esto para hacer evidente que una estrategia de exploraciones sucesivas no garantiza exactitud en las respuestas y que el proceso se torna poco eficiente. Los problemas que se plantean son los siguientes:

- 1. Arándanos y cacahuates:** El costo de un kilo de arándanos al mayoreo es de \$150 mientras que el cacahuate tiene un valor de \$40 el kilo, un empresario desea crear 40 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de \$80 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?
- 2. Almendras y arándanos:** El costo de un kilo de almendras al mayoreo es de \$205 mientras que los arándanos tienen un valor de \$150 el kilo, un empresario desea crear 30 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de \$160 por kilo, ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

En ambos problemas la respuesta exacta implica expresiones decimales periódicas, por ello, el trabajo en la hoja de cálculo sólo permite que los estudiantes encuentren aproximaciones a la respuesta, aun cuando los valores puedan ser redondeados y aparentar exactitud dada la configuración de la hoja de cálculo.

En la siguiente sección de la hoja de trabajo se retoma el problema inicial y se hace uso de las ideas de Rojano y Sutherland (2001) para la introducción de las literales x e y . Haciendo uso de las herramientas de la hoja de cálculo se propone nombrar el conjunto de valores que fueron asignados a una de las incógnitas con la literal x y al otro la literal y (ver Figura 4).

Figura 4. Fragmento de la hoja de trabajo 2 para la incorporación de simbología algebraica



La asignación de las literales x e y para representar toda una columna de datos permite que los estudiantes transiten de un sistema de signos a otro, el cual recupera las fórmulas que se usaron para construir la hoja de cálculo y, con ello, introduce de manera más natural la sintaxis algebraica convencional. Por ello, se propone que los estudiantes expliquen en sus propias palabras las ecuaciones que modelan el problema (ver Figura 5).

Figura 5. Fragmento de la hoja de trabajo 2 para la interpretación del sistema en lenguaje algebraico

Tomando en cuenta el trabajo que has realizado hasta el momento, explica qué representan las siguientes ecuaciones:

$$Y = 25 - X$$

$$120X + 40Y = 1500$$

La sección final de la hoja de trabajo 2 busca orientar a los estudiantes en la manipulación de las dos ecuaciones que constituyen el sistema, a fin de que se aplique el método de igualación y, finalmente, se encuentre la solución exacta del problema. Sin embargo, es importante reconocer que las instrucciones en la hoja de trabajo no pretenden ser una estrategia que supla la necesidad de una intervención de enseñanza concreta, ya que se reconoce que el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales implica un *corte didáctico* en el que se hace necesario reconceptualizar los conceptos de incógnita y de igualdad (Filloy, Rojano y Solares, 2010).

Resultados

A continuación, se muestra un listado de las acciones que pueden describir el comportamiento general del grupo, para realizar esta descripción se observaron las hojas de trabajo y de cálculo que elaboraron todos los estudiantes y las intervenciones que tuvieron con el investigador.

En general, se puede decir que todos los estudiantes del grupo:

1. Lograron interpretar las relaciones que el problema inicial planteaba y desarrollar con ellas una hoja de cálculo que les permitió aproximar una respuesta al problema.

2. Lograron transferir las acciones con las que desarrollaron la hoja de cálculo para el primer problema, a los problemas que se les plantearon en la segunda hoja de trabajo.
3. Usaron estrategias de ensayo y refinamiento para aproximar la respuesta de los problemas por medio de una exploración sistemática de los valores en la hoja de cálculo.
4. Dieron uso a los significados de variación y dependencia al asignar valores distintos a las incógnitas de los problemas y explorar las relaciones que los gobernaban en cuanto a cantidad y precio.
5. Construyeron significado de la idea de *sistemas de ecuaciones lineales* como un conjunto de dos ecuaciones (condiciones) que modelan un problema y que deben cumplirse de manera simultánea para los mismos valores (incógnitas).

Ahora bien, luego de que se introdujera el método de igualación como una herramienta de manipulación sintáctica con la que los estudiantes podían resolver los problemas, los estudiantes del grupo, en general:

1. Identificaron relaciones de correspondencia entre las fórmulas que introdujeron en la hoja de cálculo y las ecuaciones escritas en lenguaje algebraico convencional.
2. Reconocieron la posibilidad de abordar todos los problemas con el mismo método.
3. Identificaron que, para la construcción del sistema, las ecuaciones en cada caso tenían estructura similar al del sistema que modela el problema original.
4. Tuvieron dificultades en la manipulación de las expresiones algebraicas al momento de transponer términos, esto aun cuando intentaron replicar el proceso que se tenía como ejemplo y con el que se solucionó el primer problema.

Un caso particular

La Figura 6 muestra el trabajo de un grupo de estudiantes, quienes optaron por una estrategia en la que primero hallaron la repartición de un kilogramo del producto que costara \$60.

Figura 6. Hoja de cálculo construida una pareja de estudiantes

Kilos de nuez	Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
0.10	0.9	12	36	1200	48
0.2	0.8	24	32	1400	56
0.3	0.7	36	28	1600	64
0.4	0.6	48	24	1800	72
0.5	0.5	60	20	2000	80
0.6	0.4	72	16	2200	88
0.7	0.3	84	12	2400	96
0.8	0.2	96	8	2600	104
0.9	0.1	108	4	2800	112
1	0	120	0	3000	120
	Kilos de cahute =1- Kilos de nuez	0			0
0.25	0.75	30	30	1500	60
x25	x25				
6.25	18.75				
10	15	1200	600	1800	72
6.25	18.75	750	750	1500	60

Es fácil observar que los estudiantes exploraron primero, y de manera sistemática, todas las posibles reparticiones de la unidad usando un solo decimal (salvo 0 kilogramos de nuez y 1 de cacahuete), de esta manera recorren 10 posibles casos y posteriormente señalan (cambiando el color de fuente a rojo) los valores de costo por kilo más cercanos por exceso y por defecto (56 y 64). El paso posterior que se puede observar es que los estudiantes realizan una media entre los valores de nuez y cacahuete con los que más se acercaron al precio por kilo deseado, con estos valores obtienen la respuesta exacta de lo que buscaban, un kilo de producto con un valor de \$60, por esto resaltan toda la fila cambiando el color de la fuente a rojo.

En las últimas filas de la hoja de cálculo los estudiantes retoman la condición original de la cantidad, para ello multiplican las cantidades que hallaron como respuesta por 25 y obtienen la solución definitiva para el problema.

En la hoja de cálculo de estos estudiantes se manifiestan claramente procesos de producción de sentido y construcción de significado que permiten el acercamiento al tratamiento de estos sistemas por medios algebraicos.

Con estos resultados se hace notorio que la lectura del problema y la representación de las relaciones de éste, por medio de fórmulas en la hoja de cálculo, permitieron construcción de significados en torno a las ideas de variación y dependencia, relaciones de equivalencia y variable continua; apoyaron la producción de sentido del método de ensayo y refinamiento, la simplificación de ecuaciones y brindaron una oportunidad para la posterior introducción del planteamiento del sistema en el que la sintaxis algebraica materializa y permite la manipulación de las interacciones entre los datos.

Para el caso de la hoja de trabajo 2 una instrucción consistía en que los estudiantes definieran nombres para las dos primeras columnas de sus hojas de cálculo. De esta manera, se asignó el nombre “X” a todo el conjunto de valores en la columna etiquetada como “Kilos de nuez” y “Y” para el conjunto de valores en la columna etiquetada como “Kilos de cacahuates”. Este paso resultó fundamental para que, posteriormente pudieran reescribir las fórmulas (relaciones) que habían usado en la construcción de la hoja de cálculo incorporando las literales tradicionalmente usadas en sistemas de ecuaciones lineales. La Figura 7 muestran la reescritura de las fórmulas realizada por una pareja de estudiantes.

Figura 7. Fórmulas con X e Y

Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
X	$y = 25 - x$	$= 40 \times x$	$= 20 \times y$ $= 40x + 120y$	$\frac{40 \times 100y}{25}$ 60

Es importante señalar el hecho de que en la tabla que muestra la figura no aparece la columna inicial (Kilos de nuez), la intencionalidad que se tenía, para este hecho, obedecía a que las celdas de esa columna no tenían una fórmula que la hiciera depender de otras. No obstante, su ausencia generó un pequeño desfase en el llenado de la información por parte de los estudiantes.

Al momento que, se les solicitó en la hoja de trabajo reflexionar sobre las ecuaciones $Y = 25 - X$ y $120Y + 40X = 1500$ y se obtuvieron los resultados como el que se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Explicación de las ecuaciones del sistema

$$Y = 25 - X$$

El kilo de nuez $25 - x$ es el resultado de los kilo de nuez si le restamos a 25 los k cacahuete que es la x nos da los k de nuez.

$$(120X) + (40Y) = 1500$$

120x son los k de cacahuete y si lo pasamos a número nos da una cifra igual que 40y que esas cifras nos dan 1500.

Es importante señalar que las respuestas del grupo en general reflejan una inclinación a los referentes intermedios que les ofrece la hoja de cálculo, la cual no es netamente simbólica, ni tampoco netamente contextual. De esta manera, se observa que los estudiantes mencionan los resultados que se obtienen después de asignar valores específicos a las incógnitas “X” y “Y”, tratando estas literales aún como números concretos que deben someterse a procesos de verificación.

Los resultados de los estudiantes reflejan una asociación entre el enunciado del problema y la escritura algebraica con la que se estaba modelando. De esta manera los estudiantes estaban dando *significado* a la idea de “sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas” como una herramienta algebraica que *traduce* las relaciones del problema y las condiciones que se deben cumplir, en un SMS que puede ser manipulado con el objetivo de hallar los valores para las incógnitas.

Conclusiones

Al reconocer que cada aula de clases es una realidad única e irrepetible es posible mostrarse de acuerdo con que ninguna propuesta de enseñanza es completamente acertada ni tampoco totalmente inapropiada. A continuación, se reflexiona sobre algunas ventajas y desafíos que implicaría la réplica del modelo de enseñanza acá propuesto en un contexto convencional de aula.

Es importante señalar que el modelo de enseñanza que se planteó para este estudio no pretendía ser una herramienta para maestros que se encuentren en la búsqueda de secuencias de enseñanza. Los intereses de este estudio recaían sobre el análisis de los procesos cognitivos que tienen lugar cuando a estudiantes, sin previa capacitación en el manejo de sistemas de ecuaciones lineales, se les solicita el desarrollo de tareas de modelización matemática cuya solución implica el reconocimiento y manipulación de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. No obstante, se reconoce que el modelo de enseñanza aquí plasmado propicia, cuando menos, que los estudiantes planteen simbólicamente un sistema de ecuaciones lineales, gracias al trabajo que desarrollan en la hoja de cálculo.

Para comenzar, es importante resaltar las ventajas que presume el uso de la hoja de cálculo en términos del puente que permite construir entre los contextos concretos y los abstractos (la sintaxis algebraica) y, también, en lo que concierne a las características que ofrece como herramienta tecnológica.

Hacer uso de problemas de modelización que ofrezcan contextos cercanos y accesibles para los estudiantes posibilita que el trabajo algebraico tenga un referente concreto del que se pueden extraer significados y dar sentido a los procedimientos. Esto supone una ventaja significativa para la aplicación del modelo de enseñanza en contextos de aula convencionales. El modelo brinda al profesor la posibilidad de centrar sus esfuerzos en que los estudiantes adquieran las competencias manipulativas sabiendo que los asuntos de

corte interpretativo los puede facilitar el contexto mismo de las situaciones. En esta investigación, el modelo de enseñanza apuesta a la hoja de cálculo como una forma para que el profesor construya puentes entre la sintaxis y la semántica algebraica.

Como herramienta tecnológica, la hoja de cálculo se caracteriza por su accesibilidad en prácticamente cualquier equipo de cómputo (generalmente con la licencia de Microsoft o, como en el caso de este estudio, con hojas de cálculo en línea); además, ofrece herramientas gráficas que pueden apoyar el trabajo de los estudiantes, brindando representaciones bi- o tridimensionales de los datos; finalmente, se puede resaltar la gran velocidad para la realización de cálculos y la réplica de fórmulas que ofrece.

Es necesario enfatizar que el trabajo del docente es primordial y su rol no queda desplazado por el uso de la tecnología ni, mucho menos, por el modelo de enseñanza propuesto. Es el profesor quien debe evaluar la pertinencia de la propuesta general y también de cada elemento que la compone. De esta manera, puede apropiarse del potencial del modelo de enseñanza y ajustarlo a sus propios intereses y a las necesidades de su grupo de estudiantes.

Uno de los asuntos que el maestro debe considerar es el cómo y cuándo aplicar esta secuencia en su salón de clases. Dados los objetivos de esta investigación, la introducción del método de igualación fue realizada una vez que los estudiantes ya habían trabajado con varios problemas. No obstante, en un contexto convencional, es el docente quien debe tomar decisiones sobre si, por ejemplo, introduce el método previo al trabajo con los problemas de modelización y usa la hoja de cálculo como herramienta de validación. Depende entonces de las intenciones del docente e incluso de los tiempos de los que disponga.

Finalmente, conviene resaltar que la elección de los problemas, el uso de la hoja de cálculo y la introducción del método de igualación fueron realizadas en función de los propósitos de esta investigación. Si el interés es la enseñanza, es importante considerar otros métodos de solución de los sistemas (eliminación, sustitución, o métodos por matrices), otras formas de representación (tablas de variación y rectas en el plano cartesiano cuando menos) y, eventualmente, otras aplicaciones de estos tópicos (ajuste de datos o circuitos eléctricos, por ejemplo).

Referencias

- Blum, W., y Borromeo, R. (2016). Advancing the Teaching of Mathematical Modeling: Research-Based Concepts and Examples. En C. Hirsch, y A. McDuffie (Eds.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pág. 65-76). Washington: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fillooy, E., Rojano, T., Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fillooy, E., Rojano, T., y Puig, L. (2008). *Educational Algebra A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

- Filloo, E., Rojano, T., y Solares, A. (2010). Problems Dealing with Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(1), 52-80.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: Mathematics Education Library.
- Kieran, C. (1997). Mathematical Concepts at the Secondary School Level: The Learning of Algebra and Functions. En T. Nunez, y P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics An International Perspective* (págs. 133-158). East Sussex, UK: Psychology Press. East Sussex, UK: Psychology Press.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/ Rutas hacia el álgebra*. (Cecilia Agudelo, trad.). Boyacá, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (original en inglés publicado en 1985).
- Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática. Prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 26(1)11-30.
- Rojano, T., y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebraic world. En K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Eds.) *Proceedings of the Twelfth ICME Study Conference: The Future of the Teaching of Algebra and Learning of Algebra*, (págs. 515-522). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Sadovsky, P. (2005). La actividad matemática como "asunto" de la enseñanza. En P. Sadovsky, *Enseñar matemáticas hoy/ Miradas, sentidos y desafíos* (págs. 21-59). Buenos Aires: Libros del Zorzal.