



## APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS USANDO TECNOLOGÍA Y MATERIALES CONCRETOS

**José Carlos Cortés Zavala**

*Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana*  
jcortes@umich.mx

**Área temática:** Educación en campos disciplinares

**Línea temática:** Educación Matemática.

**Tipo de ponencia:** Intervención educativa sustentadas en investigación



### Resumen

El siguiente documento está relacionado con el uso de artefactos matemáticos y materiales concretos, los cuales pueden ser potencialmente útiles en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares a nivel Medio Superior. A nivel internacional, se ha mostrado un creciente interés por integrar la tecnología moderna (ambientes de Geometría Dinámica, sistemas computacionales de álgebra, etc.) así como tecnología clásica (regla, compás y artefactos de dibujo antiguos) para enseñar matemáticas, hecho que se populariza rápidamente. Recordemos bien que la práctica de utilizar instrumentos tangibles en Matemáticas se ha incluido históricamente en los trabajos de grandes matemáticos.

**Palabras clave:** artefactos matemáticos, medidores laser, geometría dinámica.

### Introducción

Resultados de investigación constatan la importancia del uso de nuevas tecnologías, artefactos matemáticos y materiales concretos en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. En sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998, Hoyos y Falconi 2005, Hoyos 2006, Cortés y Soto 2012), o se promueve la creatividad y el ingenio en el diseño científico mediante el uso de nuevas tecnologías (Verillon y Rabardel, 1995; Jörgensen, 1999).

Por otro lado, perspectivas teóricas y prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas (Mariotti, Bartolini, Boero et al., 2003, Maschietto, M. y Martignone, F.

2008) argumentan a favor de la introducción en el salón de clases de contextos históricos de recreación de la experiencia científica, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas. Retomando a Dubinsky (Dubinsky 1998) es necesario que usemos materiales concretos que permitan al alumno usar las matemáticas.

Además la metodología, las actividades y las secuencias curriculares utilizadas por el profesor son diferentes a las de una forma tradicional de enseñanza, basada únicamente en clases frontales. El papel del profesor es muy importante no sólo en la realización de actividades, sino también en su planificación y en la misma construcción o fabricación de instrumentos matemáticos, como mencionan Hoyos y Falconi (2005) en el prólogo de su libro *“Instrumentos y Matemáticas”* :

La fabricación misma de una máquina o juego matemático es un proceso que involucra diversas etapas de conceptualización, para lo que se requiere: 1) Un alto nivel de comprensión de las propiedades matemáticas que definen a la máquina o artefacto en términos abstractos; 2) La capacidad de definir a partir de esta conceptualización matemática (abstracta), un proceso de construcción de la máquina; 3) Finalmente se culmina con la transformación de esa definición “algorítmica” en un objeto manipulable y funcional (p. 12).

Este trabajo se exponen 3 actividades de aprendizaje una usando tecnología digital (medidor de distancia laser y tacómetro digital), otra usando artefactos matemáticos (Teodolito matemático) y la última usando materiales concretos (una cuerda).

En está presentación se abordará lo relacionado con el uso de una herramienta tecnológica que es un medidor de distancia tipo laser (MDL) y un artefacto diseñado en madera que junto con el MDL formar lo que llamaremos el Teodolito Matemático (TM) ver figura 1, 2 y 3.

**Figura 1. Medidor Laser**



**Figura 2. Base del teodolito matemático**



**Figura 3. Teodolito matemático**



En el escrito se describen tres actividades de aprendizaje que se desarrollaron usando estas herramientas tecnológicas. La primera es usando el Teodolito Matemático, la segunda es usando el medidor laser y un tacómetro digital y la tercera usando una cuerda.

### Desarrollo

Las primeras dos actividades de aprendizaje de matemáticas que se realizaron con estudiantes del 2 y 4 semestre del bachillerato de la Escuela Antonio de Lisboa de Morelia.

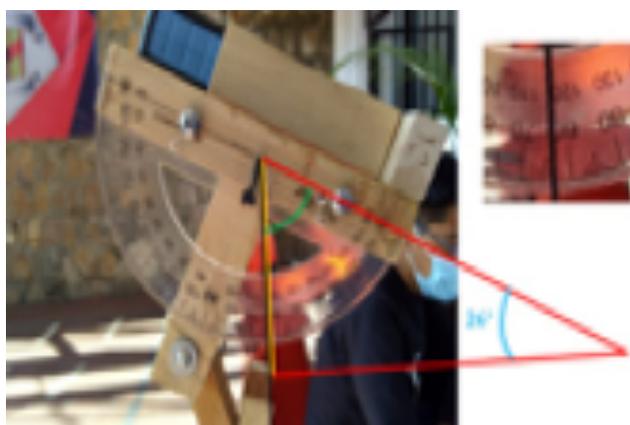
*Actividad uno: Medición de la altura de diversas edificaciones de la ciudad.*

a) Usando el Teodolito Matemático medir la altura de una pared de la escuela Figura 4, 5 y 6.

**Figura 4**



**Figura 5**

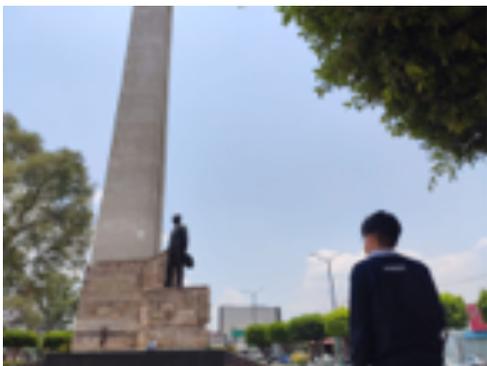


**Figura 6**

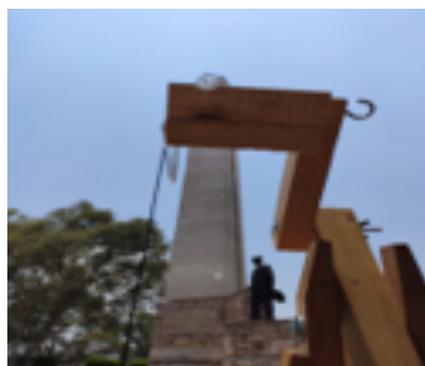


b) Usando el Teodolito Matemático medir la altura del obelisco a Lázaro Cárdenas de Morelia  
 Figura 7, 8 , 9 y 10.

**Figura 7**



**Figura 8**



**Figura 9**



**Figura 10**



Como se puede ver en La figura 4 con el TM se obtienen 3 mediciones: la distancia de la base, la distancia de la hipotenusa y el ángulo de inclinación. Para la siguiente actividad se modifico el TM quitando el medidor laser y colocando un tubo como visor figura 11 y 12. Esto con la finalidad de que solo tuvieran dos medidas: de la base y el ángulo adjunto.

**Figura 11**



**Figura 12**

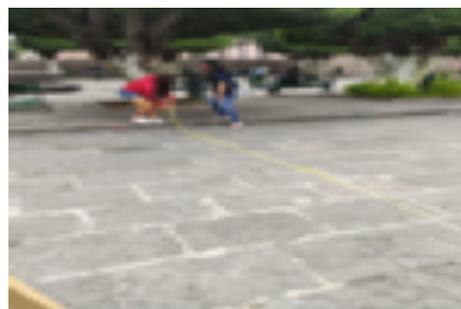


c) Usando el Teodolito Matemático medir la altura de la Catedral de Morelia Figuras 13, 14, 15 y 16.

**Figura 13**



**Figura 14**



**Figura 15**



**Figura 16**



*Actividad dos: Relacionar la distancia entre un objeto y su lugar de medición.*

*a) Introducción a la construcción de funciones*

INTRODUCCIÓN:

Una función matemática es la relación que hay entre una magnitud y otra, cuando el valor de la primera depende de la segunda.

- Variable dependiente. Es la que depende del valor de la otra magnitud.
- Variable independiente. Es la que define la variable dependiente.



*Ejercicio 1. Usando el Medidor laser*

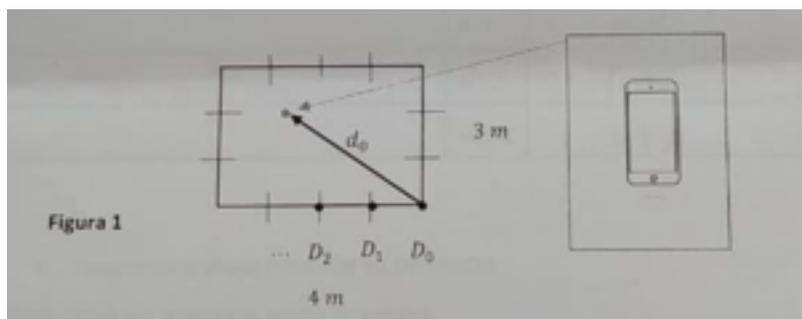
Nos interesa explicar de dónde sale la relación entre la variable independiente y la variable dependiente, para ello se le pide analizar la siguiente situación:

Una persona se encuentra en la entrada de una habitación rectangular de 4m x 3m cuando suena su teléfono que se encuentra casi en la esquina contraria de la habitación, por lo que se pregunta:

- A qué distancia estará mi teléfono?
  - Cuál será la distancia más corta entre mi teléfono y yo respecto a mi posición en la habitación?
  - Cuál será la mayor distancia entre el teléfono y yo si me desplazo a lo largo del perímetro de la habitación?.
- En un lugar grande simule la habitación haciendo un rectángulo de 4m x 3m.

Divide el perímetro del rectángulo en segmentos de 1m tal y como se muestra en la siguiente Figura 17.

**Figura 17**



Tenemos un total de 14 posiciones a lo largo del perímetro del rectángulo las que llamaremos  $D_0, D_1 \dots D_{13}$ . Con ayuda del medidor de distancia laser mida la distancia de la posición  $D_0$  al teléfono y llámela  $d_0$ , repita lo mismo  $D_1$  hasta  $D_{13}$ . Llene tabla de valores que se muestra y posteriormente grafica los puntos obtenidos

D	d
0	
1	
2	
3	
13	

Los resultados obtenidos fueron:

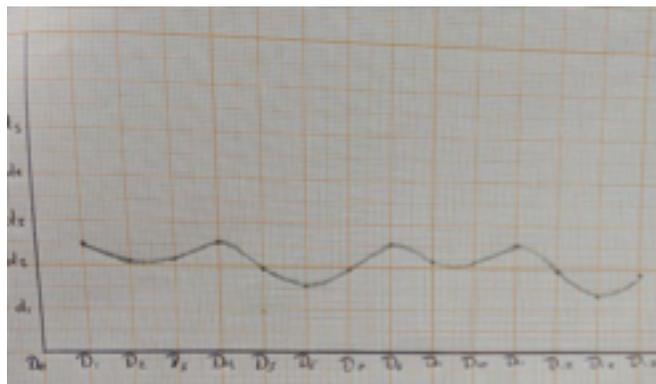
**Tabla**

**Figura 18. Figura de la tabla que se obtuvo**

POSICION		DISTANCIA AL TELEFONO
D <sub>0</sub>	d <sub>0</sub>	2.54
D <sub>1</sub>	d <sub>1</sub>	2.14
D <sub>2</sub>	d <sub>2</sub>	2.19
D <sub>3</sub>	d <sub>3</sub>	2.25
D <sub>4</sub>	d <sub>4</sub>	1.94
D <sub>5</sub>	d <sub>5</sub>	1.45
D <sub>6</sub>	d <sub>6</sub>	1.98
D <sub>7</sub>	d <sub>7</sub>	2.22
D <sub>8</sub>	d <sub>8</sub>	2.17
D <sub>9</sub>	d <sub>9</sub>	2.18
D <sub>10</sub>	d <sub>10</sub>	2.2
D <sub>11</sub>	d <sub>11</sub>	1.9
D <sub>12</sub>	d <sub>12</sub>	1.58
D <sub>13</sub>	d <sub>13</sub>	1.92

**Gráfica**

**Figura 19. Figura de la grafica que se obtuvo**



Se les pregunta también

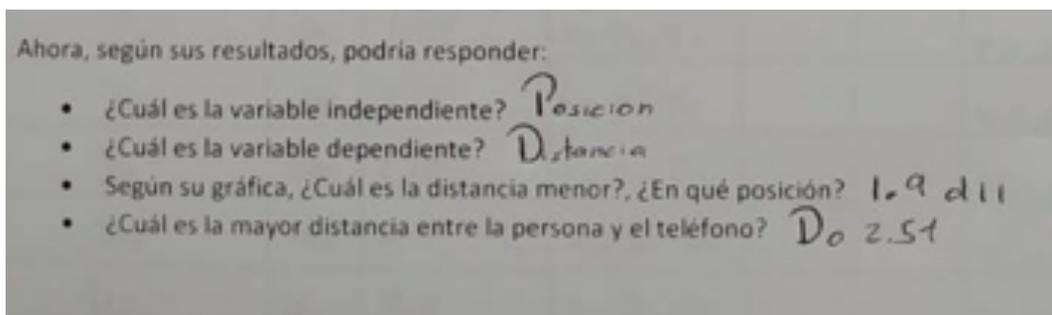
¿Cual es la variable independiente.

¿Cuál es la variable Dependiente.

De acuerdo a la gráfica ¿cuál es la distancia menor?

¿Cual es la mayor distancia entre la persona y el teléfono?

Los resultados fueron:



*Ejercicio 2. Usando un Tacómetro Digital*

Se tiene un motor(12V) que se encuentra conectado a una fuente de poder y a un regulador de voltaje(0-12V), dicho regulador solo se puede aumentar de 0.5V en 0.5V y de 1V en 1V. Nos

interesa saber la cantidad de vueltas que el motor da dependiendo de la variación del voltaje, además como es la razón de cambio de las RPM dependiendo del voltaje, sabemos que la cantidad de vueltas es constante y que en 0.5V nos da un total de 150RPM (RPM: Revoluciones por minuto.)

Con los datos que se proporcionan en el ejercicio responda:

- ¿Cuántas mediciones se pueden obtener si va incrementando el voltaje de 0.5V ?
- ¿Cuántas mediciones si lo hace de 1V?
- ¿Cuántas vueltas da el motor si se le proporciona una alimentación de 5V?

Ahora que ya respondió las preguntas, de acuerdo a los datos proporcionados genere una tabla de valores como se muestra a continuación:

Voltaje V	Revoluciones por minuto (RPM)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Una vez completada su tabla, grafique V contra RPM.

- Repita la tabla pero ahora con incrementos de voltaje de 0.5.

Voltaje V	Revoluciones por minuto (RPM)
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
12	

Una vez completada su tabla, grafique V contra RPM.

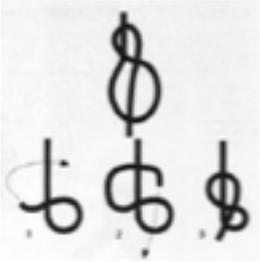
Responda lo siguiente:

- a) ¿Cómo se comporta la gráfica?
- b) ¿Cómo se llama este tipo de función?
- c) Obtener una expresión analítica

La Actividad tres se experimentó con un grupo de estudiantes de la Facultad de Físico Matemáticas, otro grupo con estudiantes de la normal superior y otro grupo con estudiantes de secundaria.

*Actividad Tres: Haciendo nudos.*

<p><b>1. Medio nudo</b></p> 	<p><b>1.1. Explicar y definir notación.</b></p>
<p><b>1.2. Simbolizar</b></p>	

<p><b>2. Nudo de ocho</b></p> 	<p><b>2.1 Explicar y definir notación</b></p>
<p><b>2.2 Simbolizar</b></p>	

Resultados de estudiantes de la Facultad de Físico Matemáticas:

<p>1. Medio nudo</p> 	<p>1.1. Explicar y definir notación.</p> <p><math>A \times B</math> = cruzar A por debajo de B</p> <p>[n] denota el n-ésimo máximo círculo creado</p> <p><math>n/A</math> denota que el extremo A se mete en el círculo por atrás</p> <p>* se jalan todos los extremos</p>
<p>1.2. Simbolizar</p> <p><math>(A \times B)[0] \setminus A *</math></p>	

Resultados de estudiantes de una Secundaria

<p><b>I. Nudos con un elemento</b></p>	
<p>1. Medio nudo</p> 	<p>1.1. Explicar y definir notación.</p> <p>Primero hace una punta hacia atrás, y luego la otra punta la cruza por abajo, utilice las manos e movimientos, y utilizando una cruz, x el círculo es el que se forma al armarlo la cruz se utilizo para cruzar los</p> <p><math>0</math> = Es la forma que se hace al hacer el nudo</p> <p><math>O</math> = lo que se forma</p> <p><math>X</math> = Es el movimiento que se hace</p>
<p>1.2. Simbolizar</p> <p><math>O \times 8</math></p>	

## Resultados de estudiantes de una normal superior

<p>1. Medio nudo</p>	<p><b>1.1. Explicar y definir notación.</b></p> <p>Comenzamos tomando la cuerda por el extremo izquierdo.</p> <p>Al tener la punta de la cuerda por el extremo izquierdo, lo pasaremos por arriba del resto de la cuerda formando una especie de letra alfa.</p> <p>Por último, pasaremos el extremo izquierdo por debajo del resto de la cuerda e introduciremos el extremo por el orificio formado.</p> <p>Estiramos las puntas para finalizar.</p>
<p>1.2. Simbolizar</p> <p>1. <math>+y</math></p> <p>2. <math>\alpha</math> <math>\times</math></p> <p>3. <math>\odot</math></p> <p>4. <math>\dashv</math></p> <p><math>\cdot \odot_2 +y, C_1 +y</math></p> <p><math>\cdot \odot_2 \alpha C_1</math></p> <p><math>\cdot \odot_2 y C_1 \odot</math></p> <p><math>\cdot \odot_2 y C_1 \dashv</math></p>	

## Conclusiones

El uso de artefactos matemáticos y materiales concretos para que los alumnos aprendan matemáticas ayuda al entendimiento de algunas ideas matemáticas. Usar un medidor de distancia laser agregando un tripié, nos permite fabricar un teodolito y con ello podremos hacer calculo de alturas usando las funciones trigonométricas, tomando la distancia de la base y el ángulo de inclinación, al hacer esta práctica con los estudiantes por un lado se obtiene una buena motivación y por otro la aplicación práctica de lo que ven en el salón de clase. Así mismo pasa con el uso del tacómetro digital la medir las revoluciones por minuto de un motor e ir variando el voltaje estamos por un lado viendo un movimiento circular que puede representarse a través de una función seno o coseno, nuevamente vemos aplicación de las matemáticas. Usar una cuerda para hacer nudos y luego intentar simbolizar los movimientos efectuados resulto ser una actividad de aprendizaje motivadora. Todas estas actividades pueden considerarse un trabajo con materiales concretos y con ellos tener buenas aproximaciones. Posteriormente se puede realizar estas actividades usando software de geometría dinámica como Geogebra y encontrar una mejor aproximación. ue expongan las principales aportaciones de la experiencia, sus límites y posibilidades hacia futuros acercamientos en la materia de la experiencia desarrollada.

## Referencias

- Bartolini Bussi, M. (2007) Experimental mathematics and the teaching and learning of proof. Research funded within the PRIN 2005019721 on "Meanings, conjectures, proofs: from basic research in mathematics education to curricular implications.
- Bartolini, Maria G. et al. (2004). The MMLAB: a laboratory of geometrical instruments. Comunicazione orale all'interno del minisimposio Applicazioni della Matematica all'industria culturale.
- Bartolini Bussi, M. et al. (2003). Learning Mathematics with tools. U.M.I. ( the association of school and university teachers of Mathematics), The paper is a part of the book that is presented at ICME.
- Cortés, C y Soto H (2012). Experimentación con un grupo de estudiantes de bachillerato con hojas de trabajo relacionadas con la parábola y elipse usando artefactos concretos. Tesis de Licenciatura, Facultad de Físico Matemáticas UMSNH, México
- Dubinsky (1998). Applying a Piagetian Perspective to Post-Secondary Mathematics Education. Georgia State University, Atlanta, Georgia, USA.
- Hoyos, V. (2006). Funciones Complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 2006, 24(1), pp. 31-42.
- Hoyos y Falconi. (2005). Instrumentos y matemáticas: historia, fundamentos y perspectivas educativas. Ed. UNAM.
- Hoyos, V., Capponi, B. y Gènevès, B. (1998). Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization..., en Proceedings of CERME1, <<http://www.fnd.uniosnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>>. Alemania: Universidad de Osnabrueck.
- Jorgensen, L. (1999). Involving Middle Students in Research Design. Proceedings of CSCL99.
- Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (2003). Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition, en Proc. XXI PME Int. Conf., 1, pp.180-195, Finlandia: Lathi.
- Maschietto, M. y Martignone, F.(2008). Activities with Mathematical Machines Pantographs and curve drawers. Research funded by MIUR (PRIN 2005019721).
- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artefacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. European Journal of Psychology of Education, 10(1), pp. 77-101.