



ESTRATEGIAS PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Yolanda Chávez Ruiz

Instituto de Educación de Aguascalientes
yolachavezruiz@gmail.com

Silvia Eduvigés Hinojosa Rizo.

Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco
silvia.hinojosa@bycenj.edu.mx

Área temática: Prácticas educativas en espacios escolares

Línea temática: Implementación de estrategias y documentación de experiencias pedagógicas

Tipo de ponencia: Intervención educativa sustentadas en investigación



Resumen

En esta intervención se describen y analizan algunas estrategias didácticas que realizan los estudiantes normalistas, en el contexto del curso de Álgebra correspondiente al plan de estudios 2018 de la Licenciatura de Educación Primaria. Esta intervención, basada en la investigación acción, reporta dos casos. Lo que aquí se reporta, está dirigido principalmente a los formadores de docentes, con la finalidad de que identifiquen el potencial didáctico y matemático de algunas tareas, para desarrollar el pensamiento algebraico. Los resultados de esta intervención muestran que seleccionar tareas con un potencial matemático y didáctico, puede tener implicaciones importantes que ayudan a los estudiantes normalistas a reflexionar sobre su práctica, diversificar tareas, cuestionar prácticas tradicionales, además de identificar las ventajas didácticas al desarrollar pensamiento algebraico al enseñar matemáticas.

Palabras clave: estrategias didácticas, pensamiento algebraico, formación inicial

Introducción

Los programas de estudio que se proponen en las escuelas Normales en México se conforman de diferentes trayectos, uno de ellos se enfoca en la enseñanza y el aprendizaje de diversos campos disciplinares; dentro de éste se encuentra los cursos correspondientes al campo de las matemáticas, los cuales han estado orientados desde diversas perspectivas. Para la reforma curricular del 2012, uno de los cursos que se incorporó en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Primaria en México, fue el de Álgebra su aprendizaje y enseñanza (SEP-DGESPE, 2013), con el propósito de que los docentes en formación adquirieran conocimientos más amplios en el campo de las matemáticas desde un pensamiento algebraico, y que este conocimiento

les posibilitara de herramientas para el diseño de secuencias didácticas, concibiendo el álgebra como soporte de la aritmética para fortalecer el desarrollo de las competencias matemáticas. La incorporación de este curso coincide con el movimiento en favor del álgebra que señala la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico, centrada en procesos de razonamiento matemático y representaciones (Kieran, et al., 2016).

En el año 2018 se lleva a cabo una nueva reforma a los planes de estudios de la Licenciatura en educación primaria y el curso de Álgebra se replantea presentando como uno de sus propósitos, profundizar en el desarrollo de competencias algebraicas, así como el análisis y la comprensión de situaciones particulares que prevalecen en el entorno de los libros y de los programas de educación primaria. “El énfasis de este curso está en fortalecer los fundamentos matemáticos de los estudiantes, para transitar al desarrollo de sus habilidades algebraicas que permitan incidir, de manera más asertiva, en su intervención pedagógica y didáctica con las y los alumnos de primaria” (SEP-DGESPE, 2019, p. 5).

Al integrarse como parte del programa el pensamiento algebraico o álgebra respectivamente, la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos dentro de las prácticas educativas se enfrentan al reto de ser abordados no solo aritméticamente sino algebraicamente. Esto implica ver el álgebra desde otra perspectiva; y aunque se ha incrementado el curso de álgebra como parte del plan de estudios, no han tenido el impacto esperado (Chávez-Ruiz, 2014; Moscoso, 2020). En el programa de 2022, que entra en vigor en los cursos a partir de 2023, se considera de manera explícita la orientación y enfoque del curso desde los planteamientos del álgebra temprana, proponiendo para tal fin desarrollar el pensamiento algebraico, poniendo énfasis en tres aspectos del álgebra temprana:

- a. Pensamiento estructural.
- b. Pensamiento funcional.
- c. Pensamiento variacional, procesos de cambio (cfr. DGESUM, 2022).

El énfasis, tiene como finalidad que los estudiantes normalistas descubran las ventajas, en términos de aprendizaje, que tiene transformar la enseñanza de las matemáticas, orientándola desde los planteamientos del álgebra temprana.

Planteamiento del problema

La formación inicial para profesores es un tema que requiere especial atención en muchos sentidos, uno de ellos es la forma en que estos estudiantes aprendieron matemáticas ya que posiblemente sigan reproduciendo en las aulas, prácticas orientadas a lo procedimental, ejercicios de repetición y memorización centrados en el cálculo, generando una matemática carente de sentido. Los estudiantes normalistas desde los primeros semestres acuden a las aulas para observar prácticas de enseñanza, para que, posteriormente, realicen sus prácticas profesionales y lo que encuentran cotidianamente en estos acercamientos es que se sigue priorizando este tipo de ejercicios y tareas matemáticas, a lo que se dedica mucho tiempo y

esfuerzo. Este tipo de ejercicios o tareas matemáticas han| perdurando por décadas y tanto para maestros, como para los alumnos, pueden significar una matemática descontextualizada.

Como lo mencionan Castro y otros (2011) “Los maestros ciertamente pueden abordar la tarea de la enseñanza, reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental, en tanto que les sean ofrecidas oportunidades para aprender a reconocer y a promover el razonamiento algebraico manifestado por los niños...” (p. 98). ¿Cuáles serían estas oportunidades para reconocer y promover el pensamiento algebraico? Las investigaciones en álgebra temprana (Early Algebra) han abordado diversas perspectivas, lo que puede orientar la toma de decisiones en la formación inicial de los profesores de educación primaria.

Esta investigación se enfoca en la siguiente cuestión: *¿Qué estrategias ayudan, a los estudiantes normalistas para favorecer el desarrollo del pensamiento?* Si el fin último de la formación inicial docente, es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de prácticas idóneas en el campo de la educación matemática, enfocarse en tareas que desarrollen pensamiento algebraico, puede contribuir con este fin.

Referentes teóricos

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional, pese a varias reformas y numerosas investigaciones, sigue implicando desafíos en el nivel de educación básica, acentuándose en secundaria, nivel en el cual se ha identificado que los estudiantes muestran dificultad para un buen desempeño en álgebra.

Esta situación impulsó el desarrollo de investigaciones en torno a las dificultades asociadas con “los procesos de aprendizaje del álgebra escolar” (Rojas y Vergel, 2013, p. 689). Los resultados de las investigaciones desde la didáctica de las matemáticas plantearon un giro a la idea de que el álgebra se tiene que abordar hasta la Secundaria y proponen considerar la introducción temprana del álgebra a través de conceptos y notaciones que favorezcan el pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, considerando la generalización y la formalización de patrones como una de las formas de introducir el álgebra en la escuela primaria, con el fin de “fortalecer y profundizar el currículo de la aritmética... representar y reflexionar sobre relaciones entre conjuntos de números, en lugar de enfocarse meramente en el cálculo” (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011, p. 16), para favorecer la construcción de estructuras asociadas al pensamiento algebraico.

Lograr que los profesores en formación adquieran un conocimiento sólido para que desarrollen la práctica de enseñanza significativa y que alcancen los propósitos educativos, requiere de esfuerzos, no solo de los formadores de formadores y una buena propuesta curricular, también es importante involucrar a los estudiantes en tareas que permitan un cambio de perspectiva y la reflexión sobre prácticas matemáticas más profundas.

En los cursos de álgebra se pueden revisar propuestas teóricas enfocadas en el álgebra temprana que orienten las tareas a una nueva álgebra con entendimiento, tareas propuestas desde diversos ámbitos del currículo que tienen que ver con álgebra; es decir reflexionar y

resolver diversas tareas desde una algebrización del currículo (Kaput, 1988). Esta propuesta teórica está enfocada en que los niños desarrollen una serie de habilidades algebraicas en distintas áreas del currículo de matemáticas (Molina, 2009), actividades como identificar patrones, observar regularidades y llegar a generalizaciones son algunos de los propósitos de esta perspectiva, lo que lleva a preguntarse ¿Cómo romper con las tareas que en muchas ocasiones son generadoras de obstáculos cognitivos al promover la concepción de una matemática monótona, abrumadora y descontextualizada? ¿Qué conocimientos es necesario que los estudiantes normalistas adquieran y qué habilidades requieren desarrollar en el campo de las matemáticas para favorecer un pensamiento algebraico, que impacte en prácticas matemáticas más idóneas?

Algebrizar el currículo de la escuela primaria, para hacer explícito el carácter algebraico de la matemática, requiere como lo afirman Radford y André (2009, p. 238) “profundizar en la comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización”, esto abriría la puerta para trabajar actividades y tareas matemáticas que favorezcan el desarrollo de un pensamiento algebraico.

Trabajar actividades o tareas que hagan presente el pensamiento algebraico como parte de los contenidos de matemáticas que marca el programa de la educación primaria, llevó a investigar características de la naturaleza de este pensamiento. De acuerdo con Aké, Mojica y Ramos (2015), al investigar el desarrollo del pensamiento algebraico se identifican diferentes características de la naturaleza del álgebra en la escuela elemental, por ejemplo: se reconoce como una aritmética generalizada (Mason, 1999), implica tratamiento de las operaciones y las funciones, (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2011), el álgebra incluye una aritmética generalizada, que requiere de la generalización y formalización de patrones; el estudio de estructuras, funciones, relaciones y la covariación.

Desarrollo

Este reporte, es parte de una investigación-acción más amplia, que tiene como propósito difundir los conocimientos didácticos que favorecen la transformación de las prácticas de enseñanza en el aula. La investigación acción, considerada dentro de los estudios de intervención, buscan producir un cambio en la realidad (Martínez Rizo, 2020).

Metodología

La presente intervención, tiene como objeto de estudio las tareas matemáticas que se llevan a cabo en el curso de Álgebra; para este propósito se presenta un estudio de caso centrado en identificar los aportes que dan determinadas tareas para conocer los procesos cognitivos y las acciones que estudiantes normalistas realizan al resolver situaciones que implican

procesos de generalización con base en el reconocimiento de un patrón geométrico a partir de sus estrategias empleadas y sus procesos de resolución. También se identifican las ventajas didácticas y el potencial de dichas tareas para desarrollar el pensamiento algebraico en las aulas de educación primaria. De acuerdo con Martínez Rizo (2020), los estudios de caso tratan de indagar el mayor número posible de aspectos, sin que necesariamente sea exhaustivo, en un número reducido de sujetos, que pueden ser personas, grupos o instituciones.

Se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes normalistas, ambos de tercer semestre, en el curso de Álgebra. El estudio se llevó a cabo a partir de implementar diversas tareas, que son “...el conjunto de actividades organizadas y orientadas, con una o múltiples estrategias de solución, donde es posible utilizar diversas representaciones, lo cual permite a los estudiantes involucrarse con la actividad matemática” (Chávez-Ruiz y Martínez-Rizo, 2018, p. 215).

Tanto en el grupo 1, como en el grupo 2, se trabajaron, durante el curso tareas para desarrollar conocimientos matemáticos y didácticos en los estudiantes. Para este reporte se recuperan las algunas intervenciones exitosas que se llevaron a cabo en ambos grupos.

Resultados

Primer caso. Grupo 1

Las tareas propuestas que hacen énfasis en el conocimiento didáctico fueron diversas y atendiendo a necesidades de formación que tienen que ver con ¿Cuáles son las actividades que los profesores de educación primaria valoran y realizan cotidianamente en el aula? ¿qué tipo de tareas favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿cómo podríamos hacer evolucionar las tareas matemáticas que los profesores proponen, con la finalidad de desarrollar pensamiento algebraico en los alumnos?

Actividades recurrentes

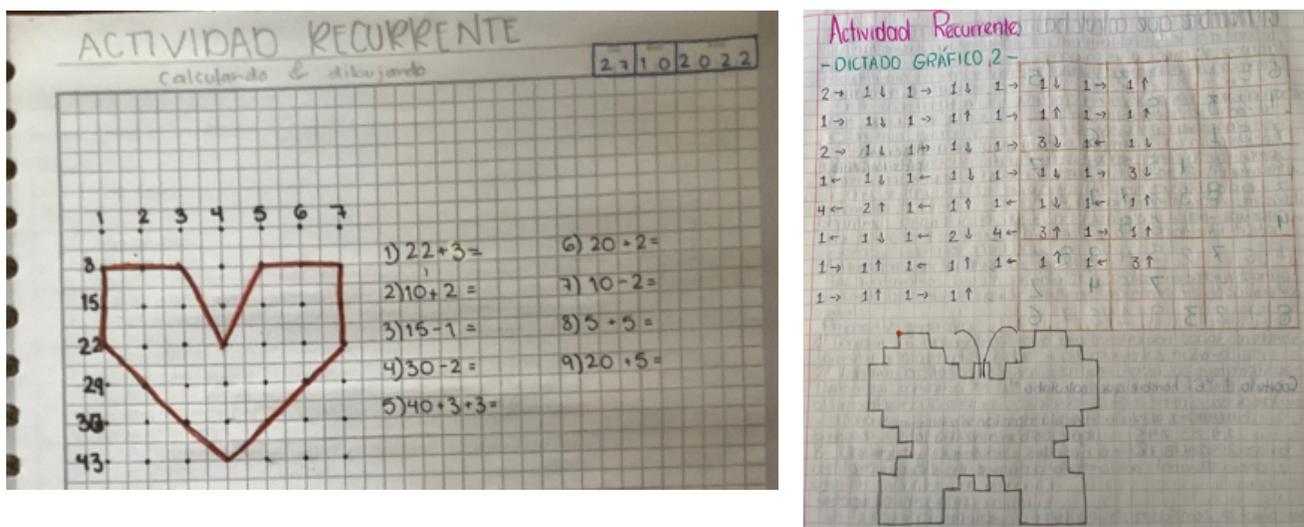
A partir de una evaluación diagnóstica y de algunas otras actividades iniciales que sugiere el programa, para iniciar el curso, como la lectura de diversos textos académicos, se identifica que los estudiantes tienen limitadas habilidades básicas, indispensables para el desarrollo de diversos aprendizajes, por lo que se decidió que una de las actividades recurrentes fuera la lectura de textos infantiles con contenido matemático, con la finalidad de ampliar el marco de referencias de los estudiantes (Chávez-Ruiz et al., 2021) . Las actividades recurrentes son actividades que se proponen al inicio de cada sesión (cuya duración no va más allá de 10 minutos), y tienen como propósito contribuir al desarrollo de habilidades y conocimientos básicos.

Una de estas actividades recurrentes fue la lectura diaria del texto “El hombre que calculaba”(Malba, 2008) que incluye 34 capítulos y en cada uno de ellos plantea una historia

junto con un problema, generalmente algebraico. Cada capítulo tiene extensión de una página, en promedio, por lo que cada día se leía y comentaba un capítulo diferente.

Otra de las actividades que los profesores de primaria valoran es el cálculo escrito, por lo que se sugiere la diversificación de estas actividades al proponer actividades recurrentes de cálculo escrito, donde, además, los alumnos desarrollan otras habilidades. En la figura 9 se muestran otras actividades recurrentes que implicaron el diseño de material didáctico para construir un repositorio colectivo de actividades que pudieran llevar al aula de práctica

Figura 1. Diseños de actividades por estudiantes para repositorio colectivo



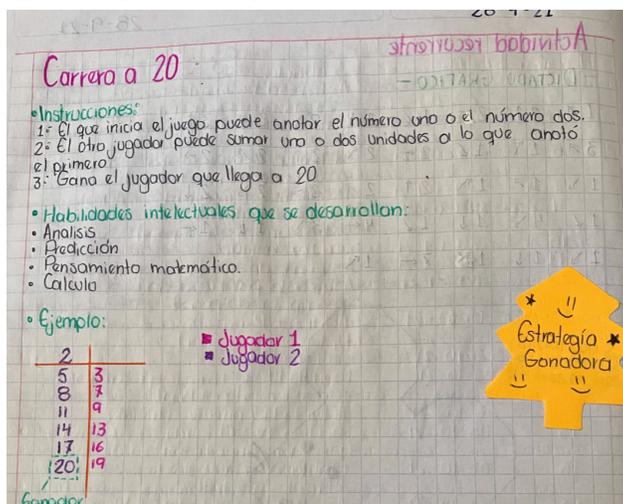
Estas tareas, tienen un potencial matemático importante, ya que manejan coordenadas que tienen una relación directa con las funciones lineales a partir de realizar cálculos simples relacionados con coordenadas en un plano cartesiano, además tienen un potencial didáctico ya que los estudiantes construyeron los diseños que requieren de encontrar una relación entre el cálculo escrito y la ubicación espacial, para construir la figura. Estas habilidades, principalmente la de diseño, son indispensables para los profesores en formación inicial para favorecer el desarrollo de habilidades para interpretar y representar expresiones algebraicas en el plano cartesiano, acciones que más adelante les permitirá comprender comportamientos de la recta que los lleva a situaciones de generalización. Y como conocimiento didáctico al diseñar tareas de cálculo, al diversificar su presentación y adecuándolas al grado escolar con el que trabajarán.

Tareas con potencial didáctico y matemático

Los estudiantes normalistas llegan al aula con ideas sobre la enseñanza de las matemáticas muy arraigadas, por lo que para generar la reflexión y el análisis de tareas se requiere de implementar actividades desafiantes de interés para los estudiantes y con un potencial matemático importante. Una de las tareas propuestas fue “Carrera a 20” (figura 7), que es un juego por parejas donde uno de los estudiantes inicia el juego escribiendo en una tabla

de dos columnas el número uno o el dos, el segundo participante debe sumar uno o dos al número que anotó su contrincante. Gana el primero que llega a 20. El propósito de la tarea era que los estudiantes identificaran una estrategia que les permitiera generar una regla con la cual aseguran ganar el juego. Se llevó a cabo intercambiando de parejas, para posteriormente participar en un torneo. Una vez que se definió la ganadora del torneo se llevó a cabo el análisis de la tarea. Se presentaron preguntas detonantes: ¿Qué habilidades intelectuales favorece? ¿Cuáles son las ventajas didácticas de este tipo de actividades?

Figura 2 Registro de Carrera a 20



Además de preguntas detonantes, se hizo énfasis en identificar elementos algebraicos en las tareas matemáticas: identificar patrones, descubrir reglas y generalizar. Se muestran las producciones de los estudiantes, con la finalidad de abreviar espacio y observar directamente las evidencias de sus registros, ya que destacan los aspectos que les parecen más relevantes.

Durante esta intervención, se decidió incluir actividades que han estado presentes en el currículo de primaria, con la finalidad de que los profesores en formación inicial identifiquen el potencial de este tipo de tareas matemáticas y de esta manera puedan diseñar actividades semejantes, que desarrollen diversas habilidades en sus alumnos, por lo que otra de las tareas propuestas fue la construcción de cuadros mágicos, haciendo énfasis en lo siguiente:

- Identificar patrones.
- Descubrir reglas.
- Generalizar algunas ideas.

Segundo caso. Grupo 2

La tarea que se propone en el grupo 2, es una secuencia de patrones, inicialmente se presentaron las cuatro primeras figuras de un patrón geométrico que corresponde al primer momento,

de acuerdo con Zapatera (2018) se puede considerar como recurrente, ya que el número de elementos aumenta de forma progresiva a lo largo de los términos siguientes. La actividad se les entregó a los estudiantes normalistas en una hoja impresa y se les solicitó resolver cada una de las tareas de forma individual. Para el análisis se consideraron los objetos matemáticos que intervienen en cada una de las tareas que conforman la actividad que se presenta en la hoja de trabajo y las estrategias empleadas en la resolución de cada una de las tareas y en general de las cinco tareas, es decir cómo las estrategias empleadas en las primeras tareas impactaron para la resolución de las siguientes tareas.

La secuencia se inicia presentando las figuras correspondientes a los primeros términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ de la progresión aritmética, cognitivamente demanda establecer por medio de la observación una relación entre estos cuatro primeros términos, acción que permite establecer un patrón de comportamiento; enseguida se solicita calcular el valor $f(n)$ para "n" pequeño, como es el lugar 17, lo que es posible responder con diferentes estrategias: con un recuento iterativo o una tabla o una expresión matemática. Para la tarea tres se trabaja con la posición 100, lo que demanda a los estudiantes cambiar de estrategia para identificar la regla general y con ello la función correspondiente; en la tarea 4 se les solicita explicar a través de una narrativa el razonamiento que realizaron para responder la tarea 2 y 3, esta tarea demanda cognitivamente reflexionar lo que observaron, de qué se dieron cuenta, qué relación establecieron; acción que les permite reconocer su proceso y estrategias que emplearon para identificar el patrón y a su vez cómo expresarlo.

Figura 3. Hoja de trabajo 47, Bloque 6. Desarrollo del pensamiento algebraico (Cedillo y Cruz, citados en SEP, 2013, s.p)

PATRONES GEOMÉTRICOS 1

Observa las siguientes figuras



En el espacio de abajo dibuja las dos figuras que siguen en esa sucesión

1. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 17?

2. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir la figura que va en el lugar número 100?

Es importante aclarar que la actividad comprende cinco momentos llevados a cabo con cinco tareas:

Momento 1. Se muestran las imágenes de los cuatro primeros términos de la sucesión (figura 15).

Demanda cognitiva. Visualizar e identificar los elementos comunes y variantes.

Momento 2. Se presenta la tarea uno y la tarea dos (figura 15).

Demanda cognitiva: Visualizar una doble estructura: posición/forma y numérica. Identificar una relación de incremento. Reconocer elementos comunes y variantes a partir de una percepción visual de cómo se modifica una figura en relación con la anterior de acuerdo con la comunalidad identificada.

Tarea 1. Como primera tarea se solicita dibujar las dos figuras siguientes de la sucesión, es decir la figura 15 y 16, apoyándose en la visualización de las figuras que se les presentan en la sucesión. Es una tarea que requiere de una generalización cercana. Para dibujar dichas figuras, el patrón puede reconocerse a partir de realizar un conteo o dibujando la secuencia por tratarse de términos pequeños, sin embargo, permite identificar cómo visualizaron la secuencia de la figura y el incremento.

Tarea 2. Se pide determinar el número de elementos correspondientes a la figura 17. Es posible trabajar operando con una generalización cercana, a partir de un recuento iterativo. Puede trabajarse con una función lineal.

Momento 3. Se presenta la tarea 3

Demanda cognitiva: Identificar un patrón y determinar una regla recursiva. Generalizar una regla, (figura 15).

Tarea 3. Se les indica encontrar el total de cuadrados que se necesitan para construir la figura que se ubica en el lugar número 100. Al determinar el total de elementos para dicho lugar, se requiere pasar de una generalización cercana a una generalización lejana, que demanda calcular términos grandes, esta acción requiere primeramente identificar un patrón para posteriormente generalizar una regla que se puede expresar con una función lineal.

Momento 4. Se les solicita argumentar sus procedimientos con los que operaron la tarea 2 y 3.

Demanda cognitiva. Reconocer el proceso que realizó. Expresar de forma escrita las acciones y procedimientos empleados para resolver dichas tareas.

Tarea 4. Debe explicar cómo razonó para responder a las tareas 2 y 3.

Momento 5. Se presenta la tarea 5 en una tabla de entrada-salida, la cual consta de dos partes. Las tres primeras situaciones se solicita encontrar los cuadrados correspondientes al lugar que se les determina, en las tres situaciones siguientes se invierte la pregunta al presentarles el total de cuadrados y preguntarles el lugar que ocuparía dicha figura

Demanda cognitiva. Establecer una relación funcional y tratamiento analítico de las cantidades indeterminadas, formulación simbólica y descontextualizada. En la primera parte se da el valor de entrada y se solicita encontrar el valor de salida; se requiere operar a partir de una generalización con cantidades indeterminadas, hacer uso de la regla que generalizaron en la tarea tres. Para la segunda parte en donde se les da el valor de salida, deben determinar el valor de entrada, requiere reconocer la igualdad como equivalencia y trabajar aplicando las propiedades de las operaciones para trabajar con los inversos. Operar con cantidades indeterminadas, con objetos intensivos como se muestra en la figura 4.

Figura 4. Tarea 5 de la Hoja de trabajo 47. Bloque 6. Desarrollo del pensamiento algebraico. Tomado de Cedillo y Cruz, (citados en SEP/DGESPE, 2013. s.p.)

5. ¿Puedes programar tu calculadora para completar la siguiente tabla?	
Lugar que ocupa la figura en la sucesión	Número de cuadrados que se necesitan
48	
75	
123	
	351
	411
	507

Tarea 5. Establecer una expresión matemática: una regla o función que les permita generalizar para determinar los elementos de n figura de la sucesión. Requiere de una función lineal y de una función inversa. Es una tarea que requiere de una generalización lejana.

Conclusiones

En este estudio se presentaron tareas que pueden contribuir con este propósito. Tanto en el grupo 1, como en el 2 se llevaron a cabo tareas que tuvieron algún potencial para profundizar en el conocimiento tanto matemático, como didáctico para la enseñanza de las matemáticas.

En los registros presentados hay evidencia del tipo de trabajo y habilidades que los normalistas desarrollaron durante el curso. En esta intervención se identificaron aspectos de las tareas que pueden favorecer el conocimiento didáctico de los profesores en formación inicial:

- La diversificación de tareas. - incluir diversas actividades recurrentes, análisis de tareas matemáticas propuestas en el currículo, análisis y observación de vídeos de clases, diseño de situaciones didácticas a partir de tareas con potencial matemático.
- Identificar las ventajas didácticas de las tareas matemáticas. - Tanto de las que se proponen a los estudiantes normalistas, como las que ellos diseñan para sus alumnos.
- Identificar las habilidades. - Tanto intelectuales, como de otro tipo, que los estudiantes desarrollaron al llevar a cabo alguna tarea matemática.

En cuanto al grupo 2, para desarrollar el conocimiento matemático en los estudiantes en formación inicial es importante considerar:

- El potencial de la tarea matemática.
- El nivel de complejidad de las tareas, que sea progresivo, aumentando la complejidad en cada tarea propuesta.
- El tipo de habilidades intelectuales que puede favorecer el trabajo con la tarea matemática.

La identificación y sistematización de las estrategias y procedimientos en la resolución de secuencias da las posibilidades de saber en dónde se ubican los estudiantes, y a partir de esta base buscar mediaciones que favorezcan la transición a niveles superiores. Además, permite identificar situaciones que pueden ser un obstáculo para el desarrollo de las competencias matemáticas, propias de su perfil docente y por consiguiente una práctica matemática idónea que favorezca la educación matemática.

Referencias

- Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., . . . De Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Bautista-Pérez, J. L., Bustamante-Rosario, M. H., & Amaya De Armas, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación Matemática*, 33(1), 125-152. <https://doi.org/10.24844/EM3301.05>
- Butto, C., & Rivera, T. (2011). *La Generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo*. Ponencia, XI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Educación y Conocimientos Disciplinarios, México. Recuperado el 2018, de www.comie.org.mx/congreso/memoria_electronica/v11/does/area-05/1330
- Carpenter, T., & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report*. Wisconsin Univ., Madison. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Washington, DC: NCISLA-RR-00-2. Recuperado el 2020, de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED470471.pdf>
- Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un desafío para la formación de maestros. *Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Quindío Colombia.
- Chávez-Ruiz, Y., De Loera, V., & Flores, F. (2021). La importancia de la lectura para la enseñanza de las matemáticas: Una experiencia desde la Investigación-acción. En *Experiencias de investigación educativa desde las escuelas Normales*. (Primera, pp. 57-83). Pie rojo Ediciones.
- DGESUM, S. (2022). *Álgebra. Su aprendizaje y su enseñanza*. Secretaría de Educación Pública. <https://dgesum.sep.gob.mx/public/planes2022/4425.pdf>
- Kaput, J. J. (Ed.). (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum.
- Kaput, J. (2000). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by “Algebrafying” the K-12 Curriculum. 1-21. Recuperado el 2019, de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf>
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2>

- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151. Recuperado el 2018, de <https://www.researchgate.net/publication/228526202>
- Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 7(3), 229-240. Recuperado el 2019, de <https://enciencias.uab.cat/article/view/v7-n3-kieran-filloy>
- Malba, T. (2008). *El hombre que calculaba* (primera). Limusa.
- Mason, J. (1999). La incitación del estudiante hacia el uso de su capacidad natural para expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Emma*, 4(3), 232-247. Recuperado el 2019, de <http://funes.uniandes.edu.co/1100/>
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *Revista en Investigación en Didáctica de la Matemática*, 3(3), 135-156. Recuperado el 2019, de <http://hdl.handle.net/10481/3475>
- Moscoso, J. A. (2020). *Guía para diseñar secuencias didácticas de pensamiento matemático en educación básica*. (1a ed.). DGESPE.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-42. Recuperado el 2019, de <https://www.researchgate.net/publication/41187239>
- Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *RELIME: Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 215-250. Recuperado el 2019, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000200004&lng=es&tlng=es.
- Rojas, P., & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, 2, 688-694. Recuperado el 2019, de www.researchgate.net/publication/318904527_Procesos_de_Generalización_y_Pensamiento_Algebraico
- Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. (R. Biekofsky, Trad.) Buenos Aires, Argentina: PAIDÓS.
- SEP-DGESPE. (2013). *Plan de estudios 2012. Licenciatura en Educación Primaria*. México: SEP. Obtenido de https://www.dgesum.sep.gob.mx/reforma_curricular/planes/lepri/malla_curricular
- SEP-DGESPE. (2019). *Plan de estudios 2018. Programa del curso de álgebra. Licenciatura en Educación Primaria*. Obtenido de https://drive.google.com/file/d/1I9pYInVzN3-C_4vmCquFXIGZ9v8yeeZx/view
- Universidad de Tsukuba (Director). (2011). *Maestros aprendiendo juntos. Implementación del estudio de clase japonés*. [Mp4].
- Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educacion Matematica*, 8(2), 34-40.
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 9(3), 193-215. Recuperado el Noviembre de 2019, de <http://funes.uniandes.edu.co/6440/>

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas "Números"*, 97, 51-67. Recuperado el 2019, de <http://www.sinewton.org/numeros>